Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones
Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen
Grado en Ingeniería Telemática

Tema 2

Señales

Tema 2. Señales

REPRESENTACIONES LOGARÍTMICAS

Representaciones logarítmicas

Siempre son relativas. 2 usos:

1. **Relación** entre potencias
   - ✓ Entrada/salida
   - ✓ Señal/ruido…
2. Representación de **niveles absolutos**
   - ✓ Pero siempre en **relación** a una unidad

Forma general:

$$\boxed{10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \text{dB}}$$

Notación:
- Valores logarítmicos: mayúsculas
- Valores naturales: minúsculas

Relación entre potencias

El dB es originariamente una relación de potencias

$$a = \frac{p_2[\mathrm{W}]}{p_1[\mathrm{W}]} = \frac{p_2[\mathrm{mW}]}{p_1[\mathrm{mW}]}$$

$$A = 10\log_{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \mathrm{dB}$$

aunque puede verse como una relación entre tensiones o intensidades

$$a = \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_2^2/R}{v_1^2/R} = \frac{i_2^2\cdot R}{i_1^2\cdot R} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{i_2^2}{i_1^2}$$

$$A = 10\log_{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{i_2}{i_1}\right) \quad \mathrm{dB}$$

Representación de niveles absolutos

Comparación con una referencia fija

Referencia	Expresión	Observaciones
1 mW	$L[\mathrm{dBm}] = 10\log\dfrac{p[\mathrm{mW}]}{1\,\mathrm{mW}}$	
1 W	$L[\mathrm{dBW}] = 10\log\dfrac{p[\mathrm{W}]}{1\,\mathrm{W}}$	x dBW = (x+30) dBm 0 dBW = 30 dBm
1µV/m	$L[\mathrm{dB\mu}] = 20\log\dfrac{e[\mu\mathrm{V/m}]}{1\,\mu\mathrm{V/m}}$	Campo eléctrico

Tema 2. Señales

CARACTERIZACIÓN TEMPORAL

Parámetros básicos

Señal $x(t)$ definida entre 0 y T

Valor de pico: $x_p = \left| x(t) \right|_{\max}$

Señal normalizada: $x_n(t) = \dfrac{x(t)}{x_p}$, por lo que $\left| x_n(t) \right| \leq 1$

Valor pico-pico (margen dinámico): $x_{pp} = \left| x(t)_{\max} - x(t)_{\min} \right|$

Valor medio: $\left\langle x(t) \right\rangle = \dfrac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$

Valor cuadrático medio: $\left\langle x^2(t) \right\rangle = \dfrac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\, dt$

$$\boxed{\left\langle x_n^2(t) \right\rangle = \frac{\left\langle x^2(t) \right\rangle}{x_p^2}}$$

Energía y potencia

Potencia media: $p_x = \dfrac{\langle x^2(t) \rangle}{R}$

Nota. Con 1 Ω, la potencia media coincide con el valor cuadrático medio

Varianza: $x_{ef}^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$

Potencia alterna: $p_{CA} = \dfrac{x_{ef}^2}{R} = \underbrace{\dfrac{\langle x^2(t) \rangle}{R}}_{p_x} - \underbrace{\dfrac{\langle x(t) \rangle^2}{R}}_{p_{CC}}$

Nomenclatura

x_{ef}: valor eficaz

$x_{ef}^2 \equiv \sigma_x^2 =$ varianza

Energía media: $E_x = p_x \cdot T = \dfrac{1}{R} \int_0^T x^2(t)\, dt$

Factor de cresta: $k_c = \dfrac{x_p}{x_{ef}}$

mide dispersión de amplitudes
con respecto al valor eficaz

Clasificación de señales

- Señales definidas en potencia $\Leftrightarrow 0 < p_x < \infty$

$$(\Rightarrow E_x \to \infty)$$

- Señales definidas en energía $\Leftrightarrow 0 < E_x < \infty$

$$(\Rightarrow p_x = 0)$$

  - ✓ En el mundo real las señales siempre son definidas en en energía, ya que tienen una duración limitada
  - ✓ Pero en el estudio matemático es habitual considerar señales definidas en potencia (p.ej. una sinusoide)

Tema 2. Señales

CARACTERIZACIÓN ESPECTRAL

Densidad espectral de energía

$X(f)$: transformada de Fourier de $x(t)$

$S_x(f)$: densidad espectral de energía

- ✓ Mide la energía de la señal por unidad de ancho de banda (Julios/Hz)

$$\boxed{S_x(f) = \frac{1}{R}\left|X(f)\right|^2 \quad [\text{J/Hz}]}$$

La energía de la señal puede calcularse en t o en f :

$$E_x = \frac{1}{R}\int_0^T x^2(t)\,dt \underset{\text{Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$$

Densidad espectral de potencia (espectro de potencia)

Señal no periódica. No es desarrollable por Fourier: se toma una versión truncada (entre $-T/2$ y $T/2$) y se calcula su transformada de Fourier

$G_x(f)$: densidad espectral de potencia

- ✓ Mide la potencia de la señal por unidad de ancho de banda (W/Hz)

$$G_x(f) = \frac{1}{R} \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| X(f) \right|^2 \quad [\mathrm{W/Hz}]$$

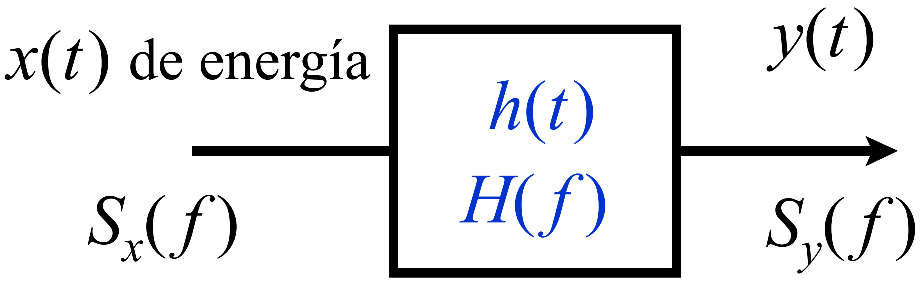
La potencia de la señal puede calcularse en tiempo o en frecuencia:

$$p_x = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)\, dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\, df$$

Respuesta de un sistema LTI

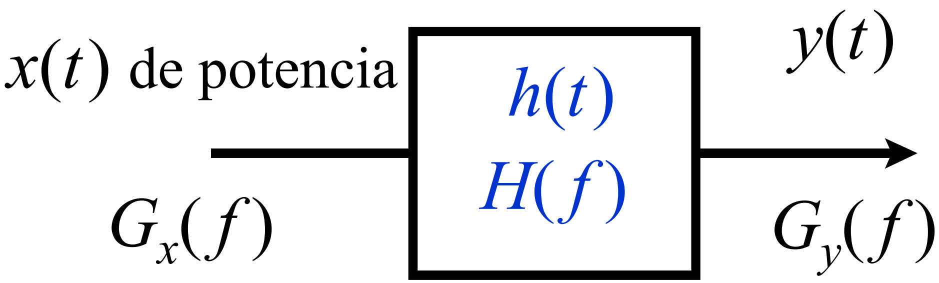
- Cuando una señal pasa a través de un sistema LTI, la densidad espectral a la salida queda relacionada con la densidad espectral a la entrada según:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot \left| H(f) \right|^2$$



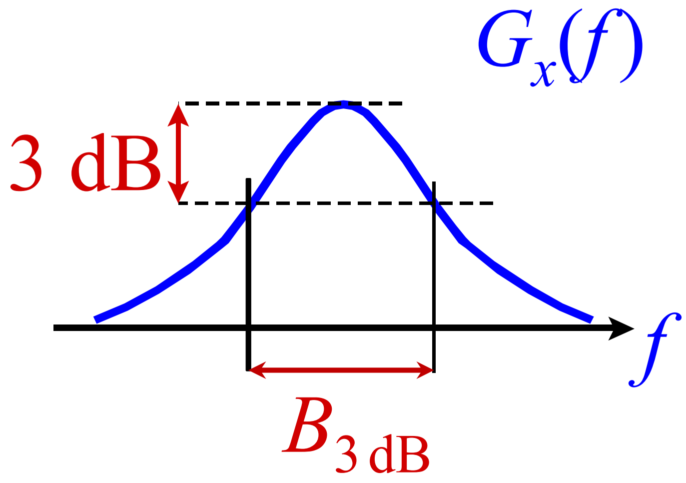
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

$$G_y(f) = G_x(f) \cdot \left| H(f) \right|^2$$

Ancho de banda

- Ancho de banda a 3 dB:

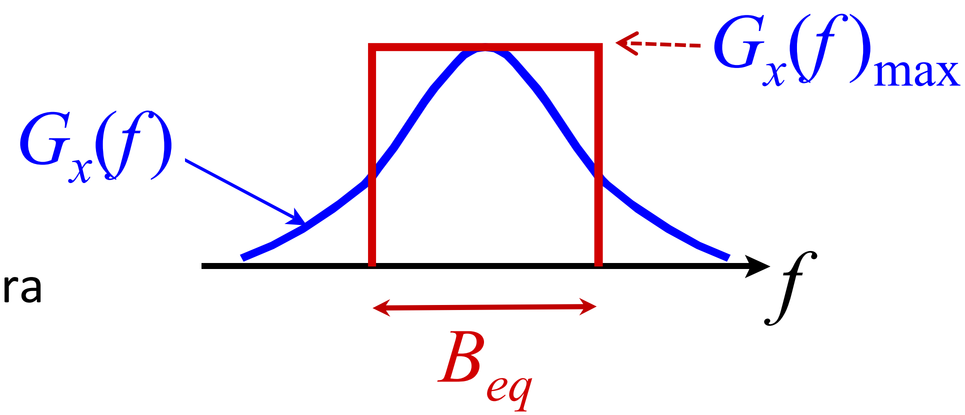
  Nota. Si la señal es banda base, se mide desde $f = 0$ (solo frecuencias positivas)



- Ancho de banda equivalente

$$B_{eq} = \frac{\int_0^{\infty} G_x(f)\, df}{G_x(f)_{\max}}$$

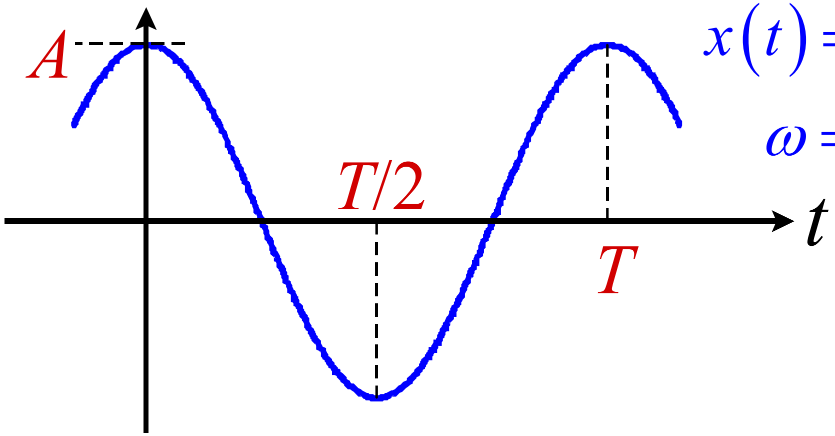
Suponer que toda la potencia se concentra en un espectro rectangular de amplitud $G_x(f)_{\max}$ y ancho B_{eq}



Tema 2. Señales

SEÑALES HABITUALES

Señal sinusoidal



$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi/T$$

Potencia:

$$p_{CC} = \frac{\langle x(t)\rangle}{R} = 0$$

$$p_x = p_{CA} = \frac{\langle x^2(t)\rangle}{R} = \frac{A^2}{2R}$$

Transformada de Fourier:

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Densidad espectral de potencia:

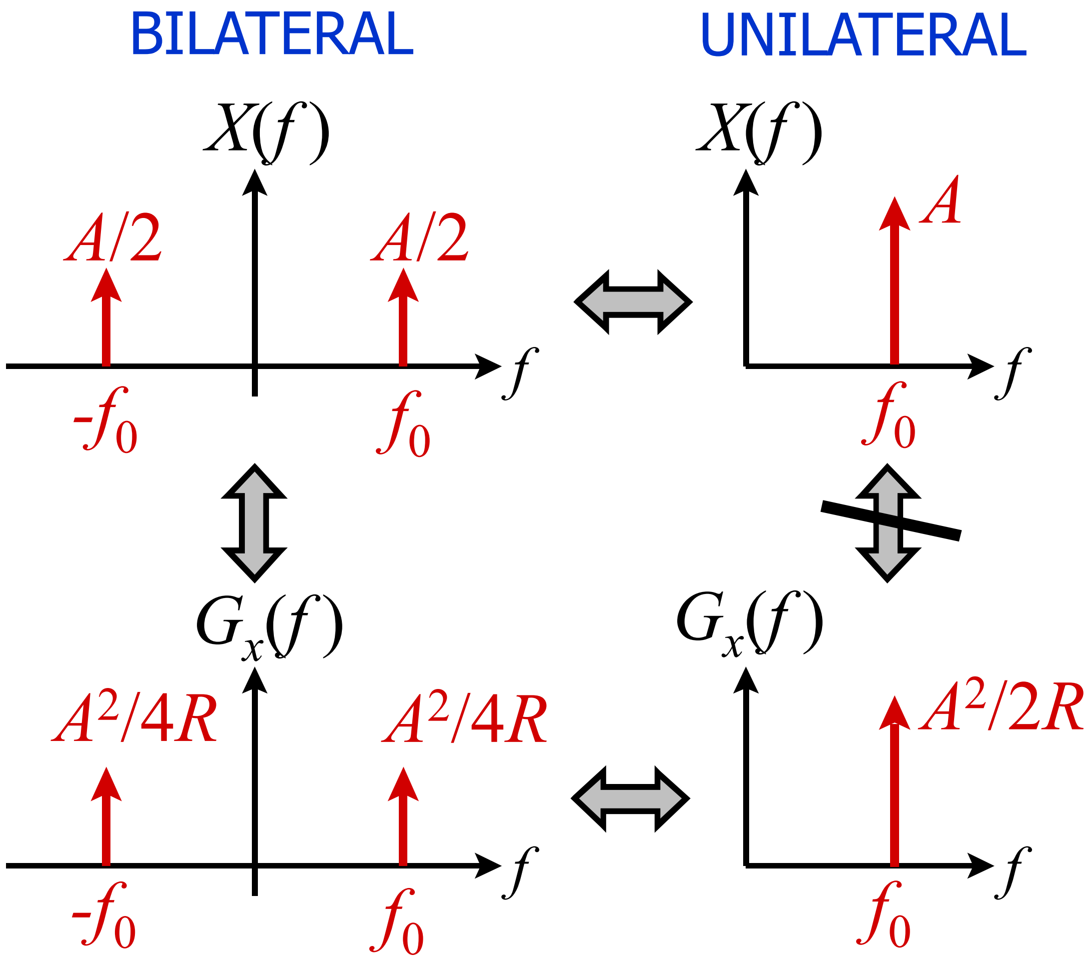
$$G_x(f) = \frac{A^2}{4R}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$\text{Señal} \xrightarrow{\text{pasar a}} \text{Potencia}$$

$$\text{cte} \xrightarrow{\text{pasar a}} \text{cte}^2$$

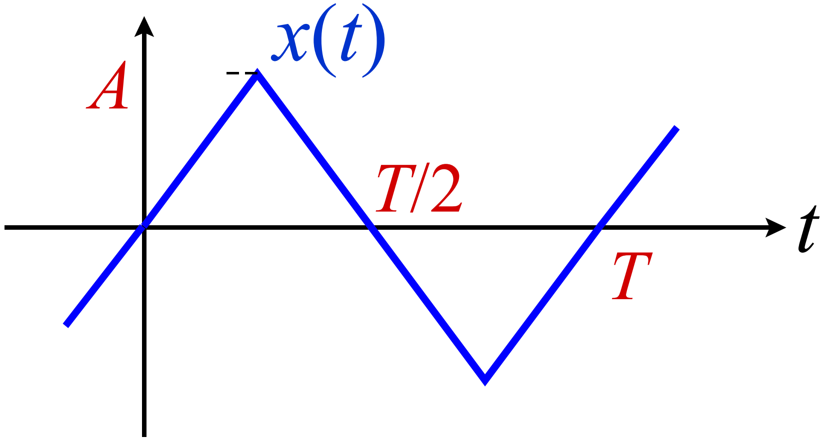
$$X(f) \xrightarrow{\text{pasar a}} G_x(f)$$

Señal sinusoidal



Nota. Se cumple que: $p_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\, df = \dfrac{A^2}{2R}$

Señal triangular



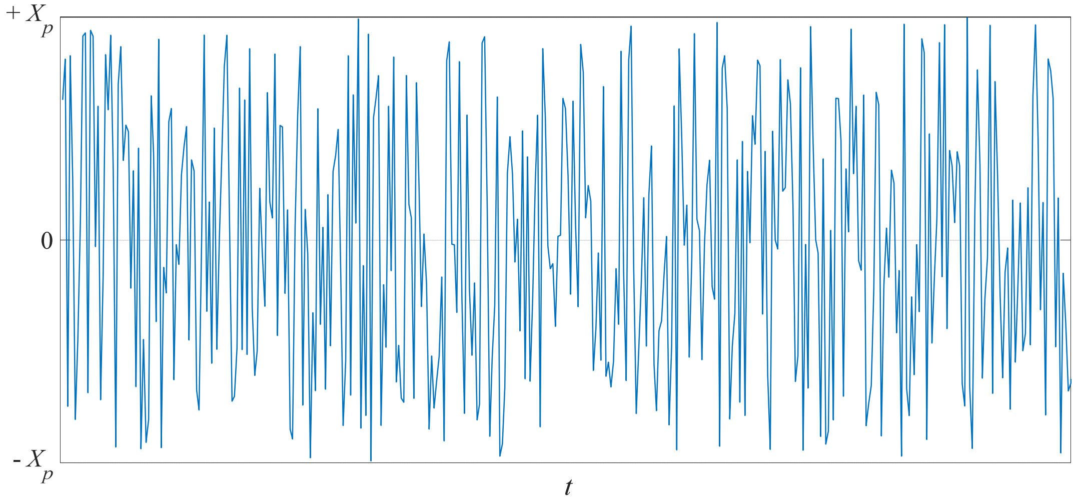
$$\langle x(t) \rangle = 0 \Rightarrow p_x = p_{CA}$$

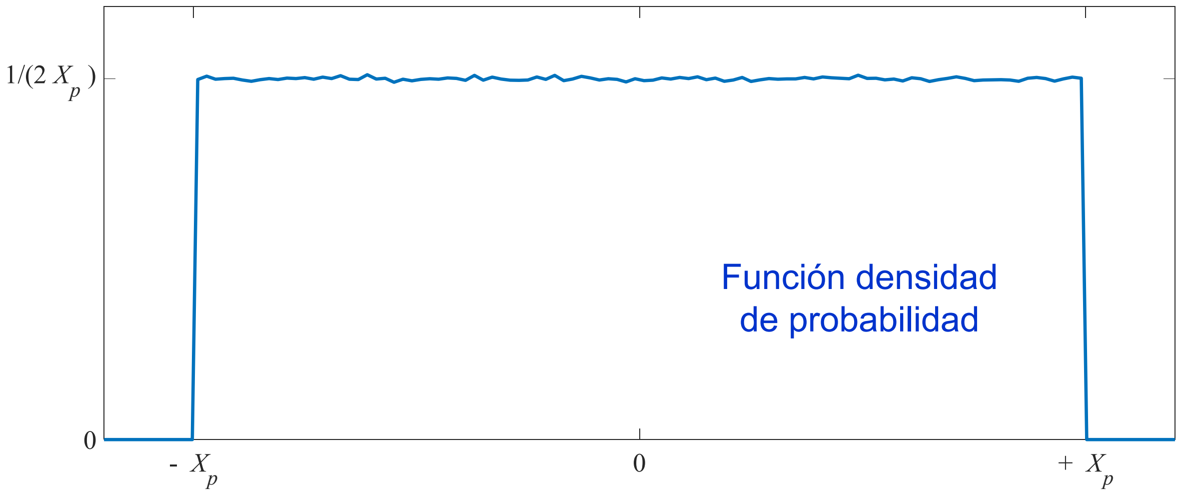
$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{A^2}{3}$$

$$p_x = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{R} = \frac{A^2}{3\,R}$$

Señal con función densidad de probabilidad (fdp) uniforme

Señal de entrada caracterizada por una fdp uniforme entre $-x_p$ y x_p:





$$\boxed{x_{ef}^2 = x_p^2 / 3}$$

Tema 2. Señales

TABLAS DE FÓRMULAS

Relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \quad \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

$$\operatorname{sen}^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2a)\right]; \quad \cos^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2a)\right]$$

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)\right]$$

Propiedades de la transformada de Fourier

Operación	$x(t)$	$X(f)$
Escalado	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Desplazamiento en t	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Desplazamiento en f	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$
Convolución en t	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f)\cdot X_2(f)$
Convolución en f	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$
Modulación coseno	$x_1(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)$

Pares transformados de Fourier

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

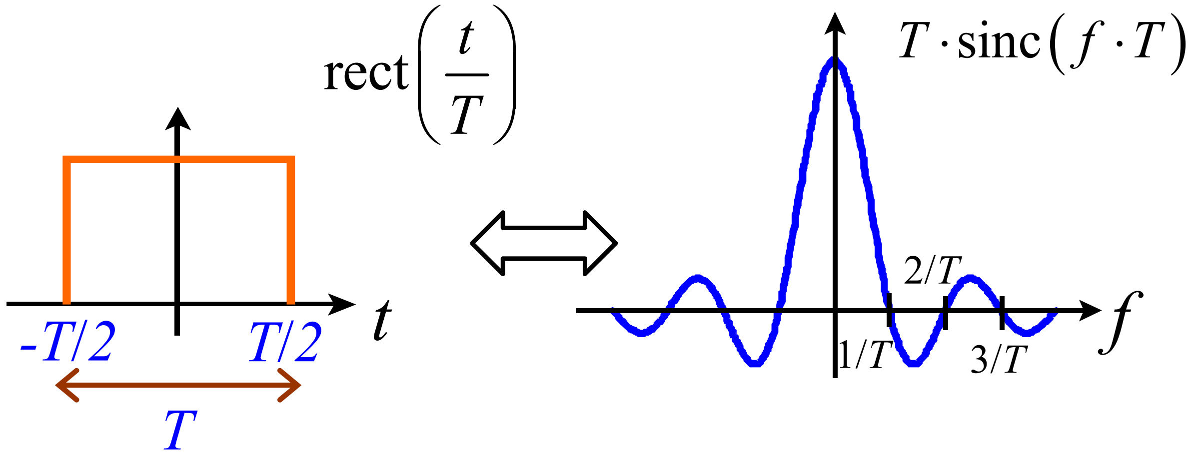
$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f-f_0)$$

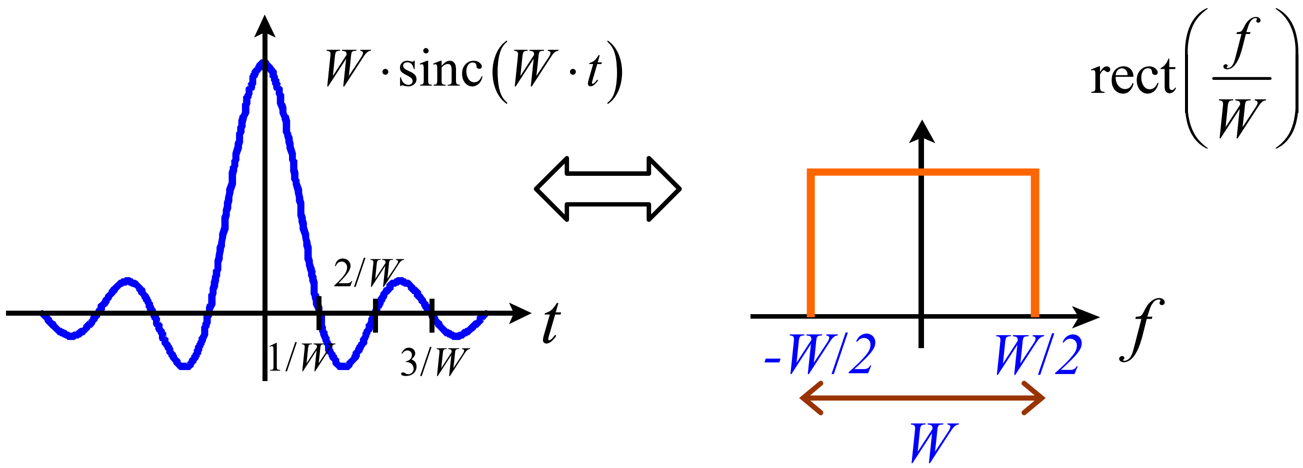
$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\operatorname{sinc}(fT)$$

$$W\operatorname{sinc}(Wt) \leftrightarrow \operatorname{rect}\left(\frac{f}{W}\right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT_0) \leftrightarrow \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

Funciones rect y sinc





$$\boxed{\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}}$$