Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones
Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen
Grado en Ingeniería Telemática

Tema 5

Modulaciones analógicas

Modulaciones analógicas

$$A\cos\left(\omega_c t+\varphi\right) \rightarrow y\left(t\right)$$ modulada

$x\left(t\right)$ moduladora

Modulaciones lineales. Se varía la amplitud instantánea

- ✓ AM: doble banda lateral con portadora
- ✓ DBL: doble banda lateral sin portadora

Modulaciones angulares. Se varía la frecuencia instantánea

- ✓ FM: modulación de frecuencia

Objetivos que se persiguen al modular:

- Trasladar la señal paso bajo a frecuencias superiores, para adaptarla al canal de transmisión
- Transmitir simultáneamente varias señales mediante multiplexado en frecuencia
- Expandir el ancho de banda de la señal transmitida para incrementar la inmunidad frente al ruido (solo angulares)

Definiciones

- **Potencia media** de la señal modulada (potencia transmitida), p_y
  - ✓ En modulaciones lineales se distingue entre:
    - Potencia de portadora, p_c
    - Potencia de bandas laterales, p_{BL}
  - ✓ Eficiencia (en AM): $$\eta = \frac{p_{BL}}{p_y}$$
- **Potencia equivalente de pico**, PEP. Potencia de un tono cuya amplitud es igual a la máxima amplitud instantánea de la señal
  - ✓ La PEP es siempre mayor o igual que la potencia transmitida
  - ✓ Una PEP muy superior a p_y limita el rendimiento del amplificador final de potencia: se obliga al amplificador a trabajar en zona lineal hasta PEP

Tema 5. Modulaciones analógicas

MODULACIONES LINEALES

Modulación DBL. Forma de onda

- Expresión canónica:

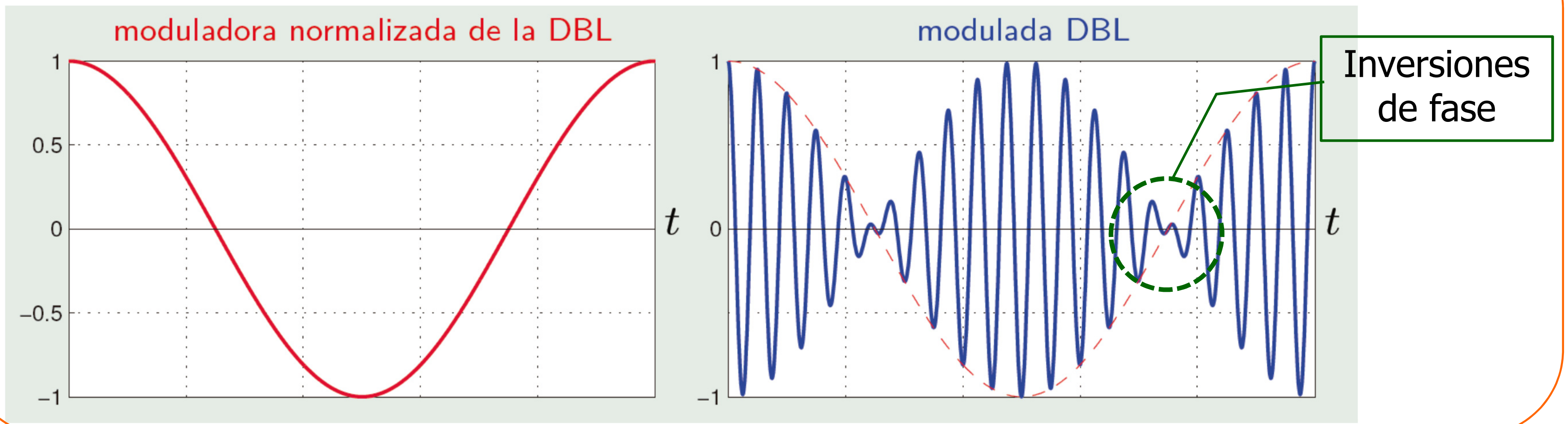
$$y(t) = A \cdot x_n(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

  - ✓ $y(t)$: señal modulada en DBL
  - ✓ A: amplitud total
  - ✓ $x_n(t)$: moduladora normalizada

POTENCIAS

$$p_y = \frac{A^2}{2R}\left\langle x_n^2 \right\rangle, \quad PEP = \frac{A^2}{2R}$$

Para una moduladora sinusoidal:



Modulación DBL. Modulador directo

RECORDATORIO

$x_n(t)$: señal normalizada

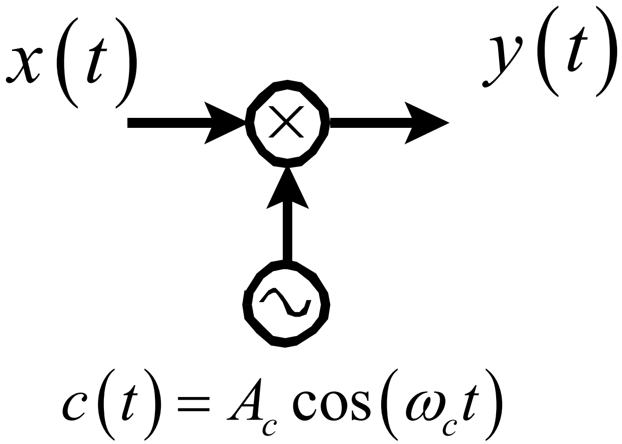
$x_n(t) = x(t)/x_p$

$\left|x_n(t)\right|_{\max} \le 1$

- Ejemplo. Una forma de obtener DBL

Moduladora: $x(t) = A_m \cdot x_n(t)$

Portadora: $c(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t)$



Obtención de $y(t)$:

$$y(t) = x(t) \cdot c(t)$$

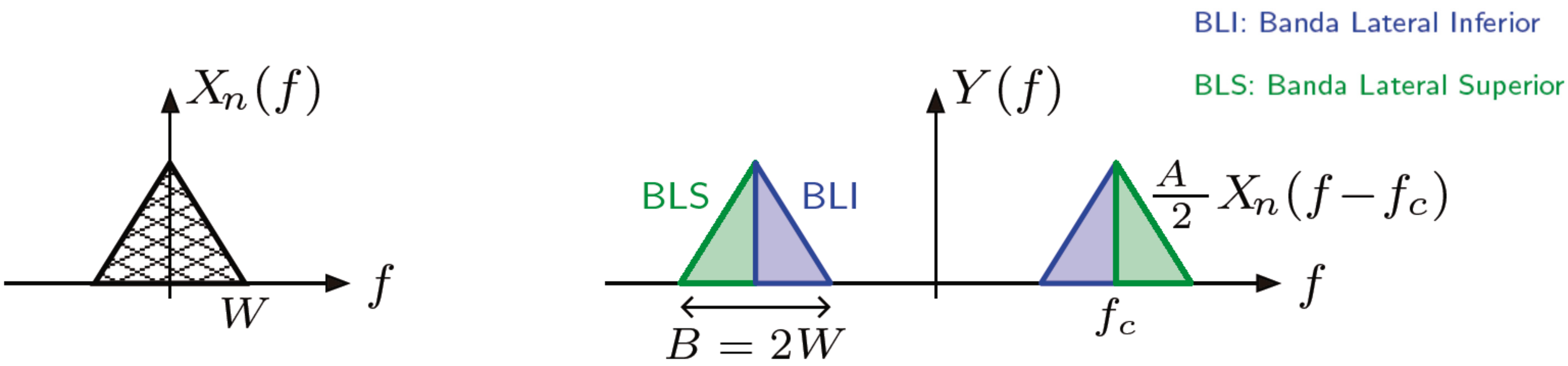
$$y(t) = \underbrace{A_m \cdot A_c}_{A} \cdot x_n(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

Modulación DBL. Espectro

- Modulando con una señal moduladora genérica $x_n(t)$
  - ✓ con transformada de Fourier $X_n(f)$
  - ✓ densidad espectral de potencia $G_x(f)$
  - ✓ y ancho de banda W

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left[X_n(f - f_c) + X_n(f + f_c)\right]$$

$$G_y(f) = \frac{A^2}{4}\left[G_x(f - f_c) + G_x(f + f_c)\right]$$



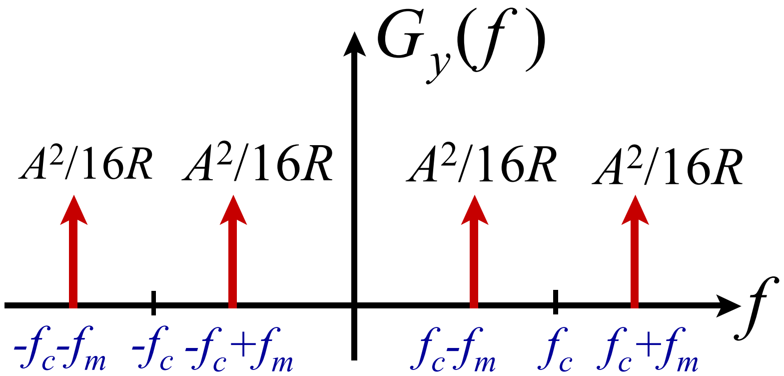
Modulación DBL. Espectro

Modulando con un tono de frecuencia f_m

$$y(t) = A\cos(\omega_m t)\cos(\omega_c t) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t\right]$$

$$Y(f) = \frac{A}{4}\left[\delta\left(f - (f_c + f_m)\right) + \delta\left(f + (f_c + f_m)\right) + \delta\left(f - (f_c - f_m)\right) + \delta\left(f + (f_c - f_m)\right)\right]$$

$$G_y(f) = \frac{A^2}{16R}\left[\delta\left(f - (f_c + f_m)\right) + \delta\left(f + (f_c + f_m)\right) + \delta\left(f - (f_c - f_m)\right) + \delta\left(f + (f_c - f_m)\right)\right]$$



$$p_y = 4\frac{A^2}{16R} = \frac{A^2}{4R}$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R}$$

En un analizador de espectros (unilateral) se ven 2 deltas, cuya potencia es:

$$p_{1BL} = \frac{A^2}{8R} \quad \text{(cada una)}$$

Modulación AM. Forma de onda

Expresión canónica:

Envolvente $A(t)$

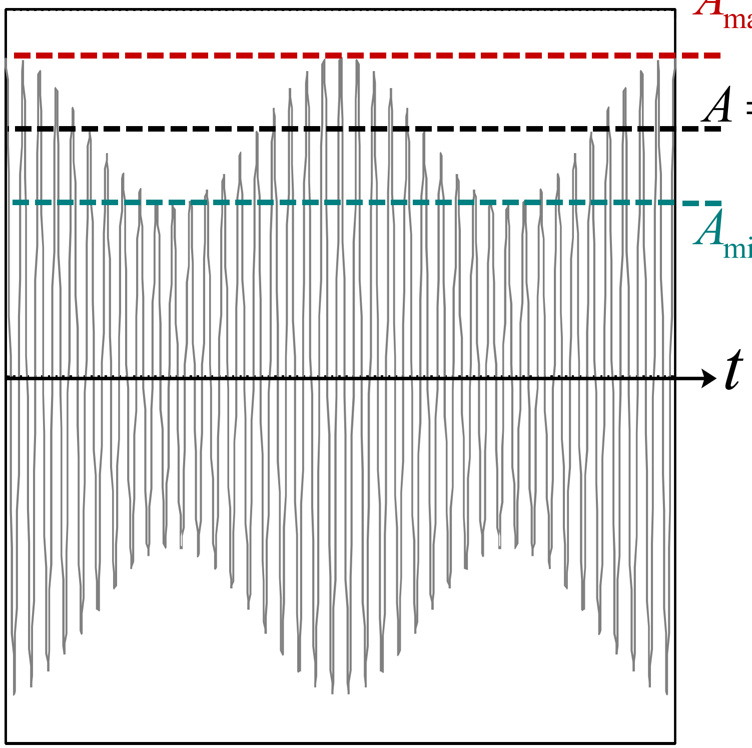
$$y(t) = A\left[1 + m\, x_n(t)\right]\cos(\omega_c t)$$

- $y(t)$: señal modulada en AM
- A: valor medio de la envolvente
- m, $0 < m \leq 1$, índice de modulación: regula cuánto modifica la moduladora a la envolvente
- $x_n(t)$: señal moduladora normalizada
- La forma de la envolvente $A(t)$ es la forma de $x_n(t)$

Modulación AM. Forma de onda

Envolvente $A(t)$

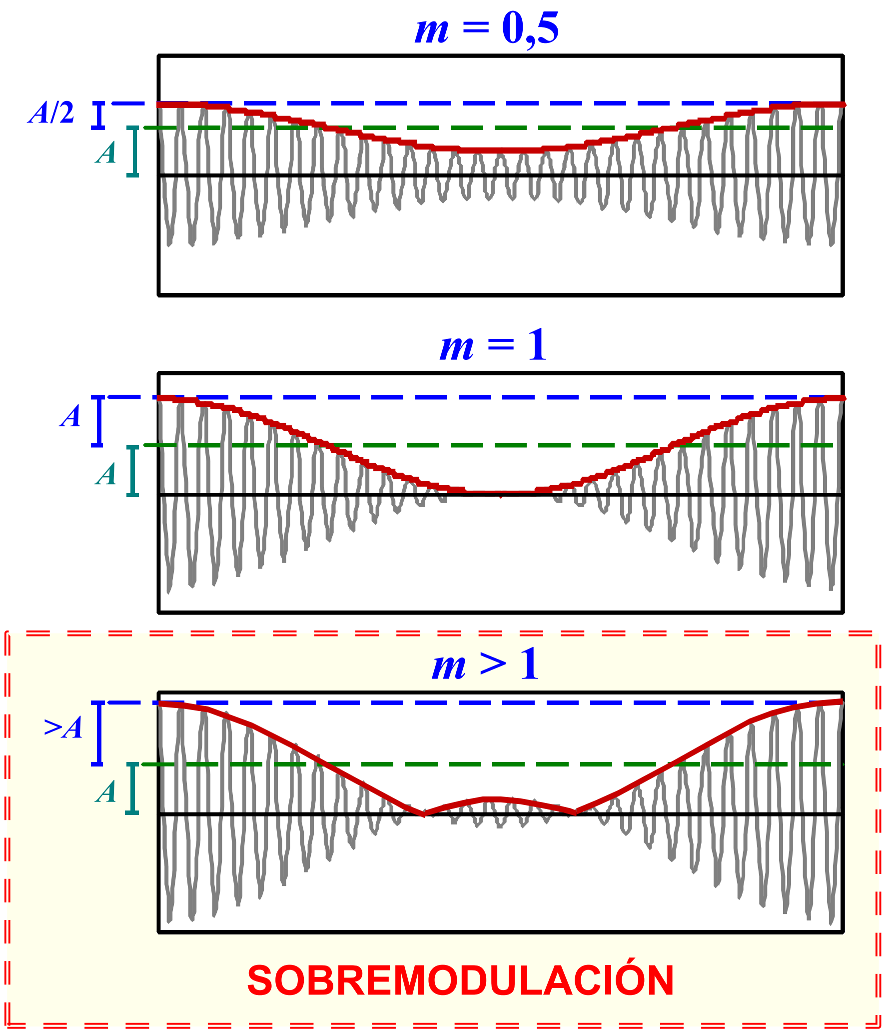
$$y(t) = A\left[1 + m\, x_n(t)\right]\cos(\omega_c t)$$



$$A_{max} = A(1+m)$$

$$A = \frac{A_{max} + A_{min}}{2}$$

$$A_{min} = A(1-m)$$

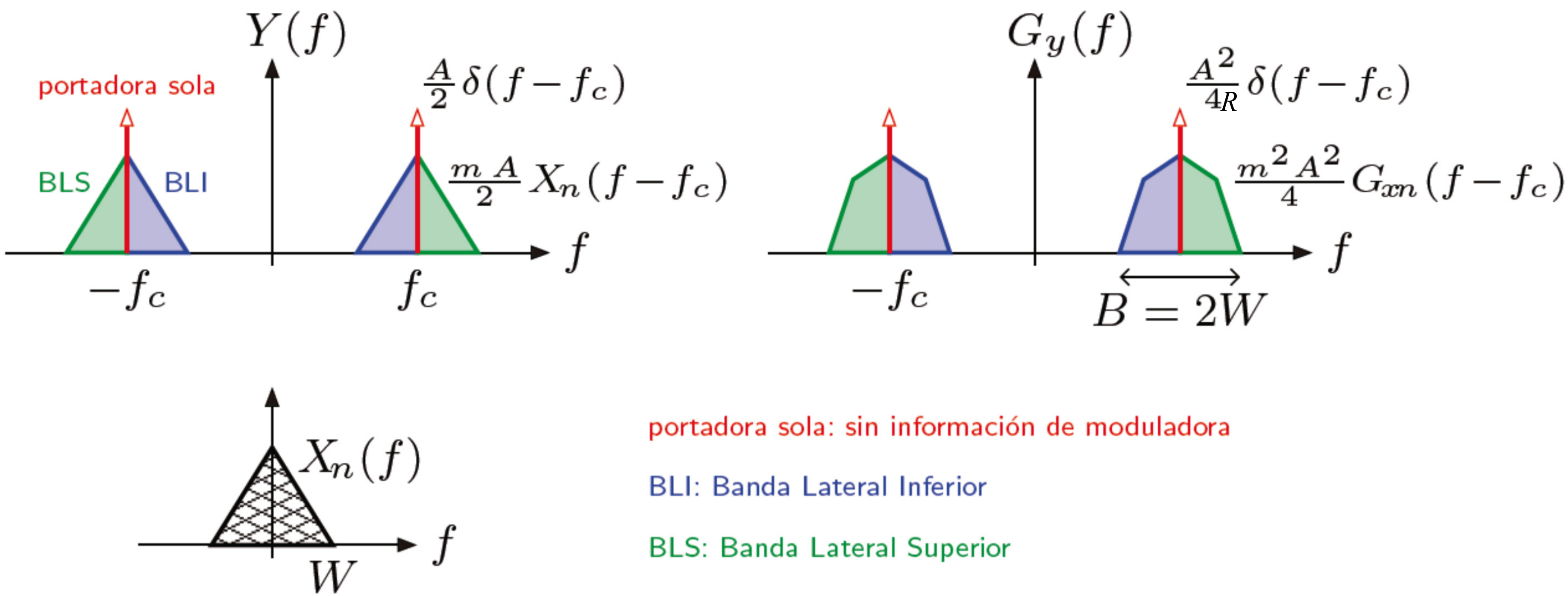


Modulación AM. Espectro

Modulando con una señal moduladora genérica $x_n(t)$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right] + \frac{m\,A}{2}\left[X_n(f - f_c) + X_n(f + f_c)\right]$$

$$G_y(f) = \frac{A^2}{4R}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right] + \frac{m^2 A^2}{4}\left[G_x(f - f_c) + G_x(f + f_c)\right]$$



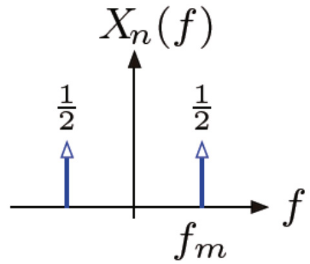
portadora sola: sin información de moduladora

BLI: Banda Lateral Inferior

BLS: Banda Lateral Superior

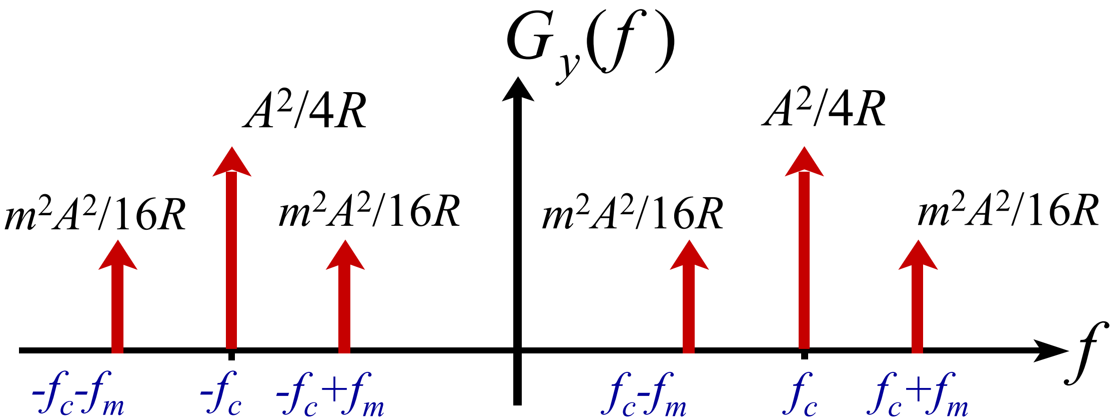
Modulación AM. Espectro

Modulando con un tono de frecuencia f_m



$$Y(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$$
$$+\frac{m\,A}{4}\left\{\delta\left[f - (f_c + f_m)\right] + \delta\left[f + (f_c + f_m)\right] + \delta\left[f - (f_c - f_m)\right] + \delta\left[f + (f_c - f_m)\right]\right\}$$

$$G_y(f) = \frac{A^2}{4R}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right] +$$
$$+\frac{m^2 A^2}{16R}\left\{\delta\left[f - (f_c + f_m)\right] + \delta\left[f + (f_c + f_m)\right] + \delta\left[f - (f_c - f_m)\right] + \delta\left[f + (f_c - f_m)\right]\right\}$$



En un analizador de espectros se ve

- una delta en f_c de potencia:

$$p_c = \frac{A^2}{2\,R}$$

- y dos deltas laterales de potencia:

$$p_{1BL} = \frac{m^2 A^2}{8\,R} \quad \text{(cada una)}$$

Modulación AM. Potencias

Para cualquier tipo de señal moduladora:

$$p_y = \frac{A^2}{2R}\left[1+m^2\left\langle x_n^2\right\rangle\right] \rightarrow \begin{cases} \text{portadora: } p_c = \dfrac{A^2}{2R} \\ \text{bandas laterales (ambas): } p_{2BL} = \dfrac{A^2}{2R} m^2\left\langle x_n^2\right\rangle \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Eficiencia: } \eta = \frac{\text{pot. útil}}{\text{pot. total}} = \frac{p_{2BL}}{p_y} = \frac{m^2\left\langle x_n^2\right\rangle}{1+m^2\left\langle x_n^2\right\rangle}$$

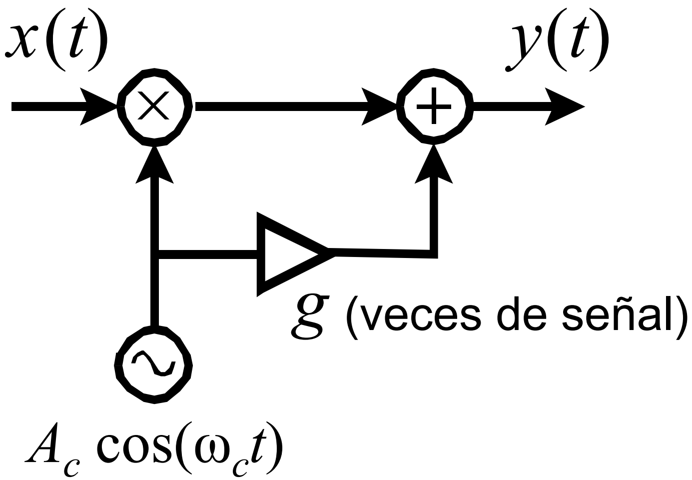
$$PEP = \frac{A^2}{2R}(1+m)^2$$

Para señal moduladora sinusoidal:

$$p_c = \frac{A^2}{2R} \qquad p_{2BL} = \frac{m^2 A^2}{4R} \text{ (ambas bandas)}$$

Modulador AM

- Ejemplo de modulador (hay otras posibilidades)



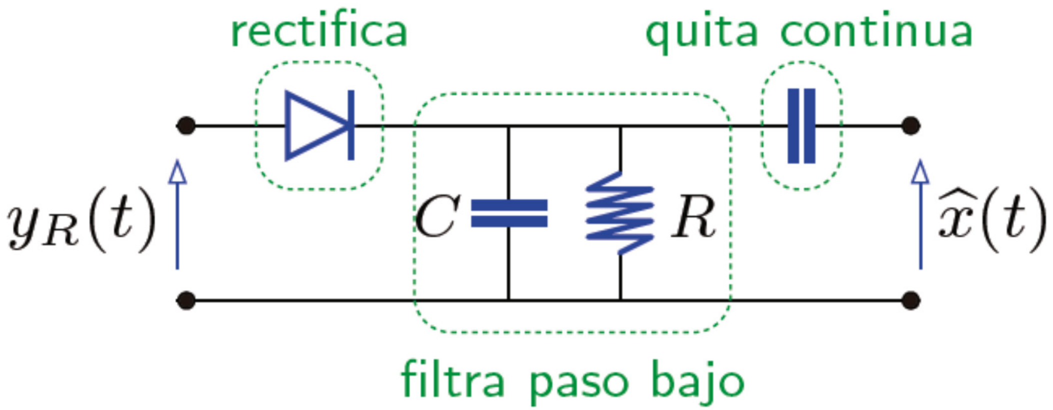
$$x(t) = A_m x_n(t)$$

$$y(t) = A_m x_n(t) A_c \cos(\omega_c t) + g\, A_c \cos(\omega_c t) =$$

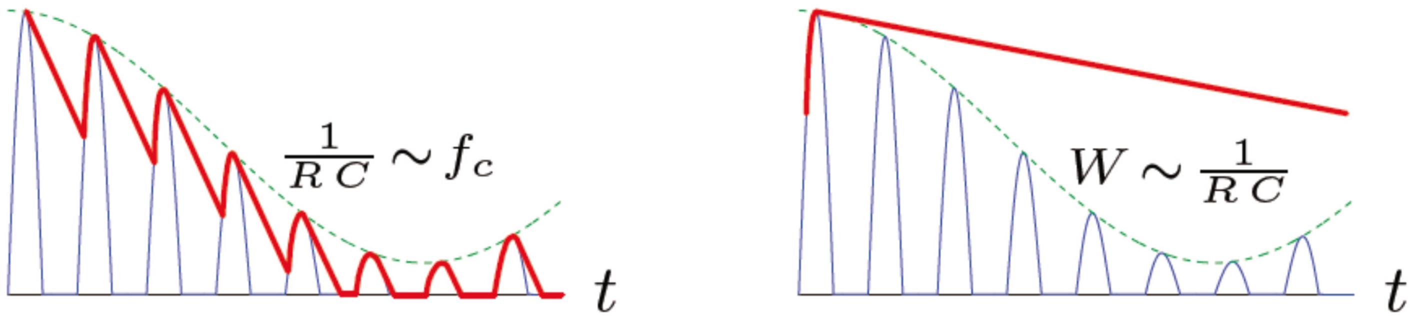
$$= \underbrace{g\, A_c}_{A} \left[1 + \underbrace{(A_m/g)}_{m}\, x_n(t) \right] \cos(\omega_c t)$$

Demodulador AM no coherente

Detector de envolvente

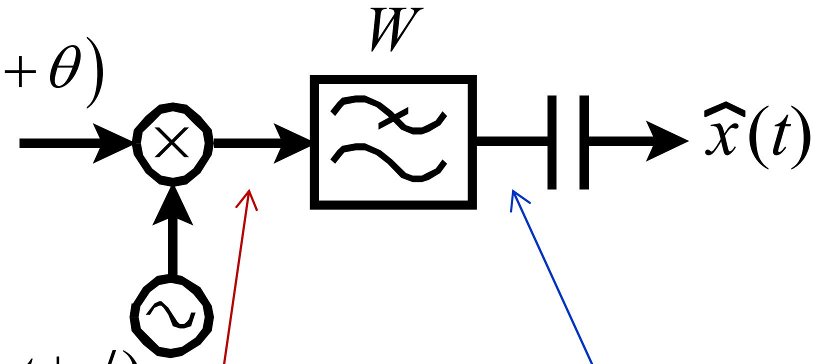


$$W \ll \frac{1}{RC} \ll f_c$$



Demodulador coherente para modulaciones lineales. Aplicación para AM

$$y_R(t) = A_R\left[1+m\cdot x_n(t)\right]\cos(\omega_c t+\theta)$$



$$A_c\cos(\omega_c t+\phi)$$

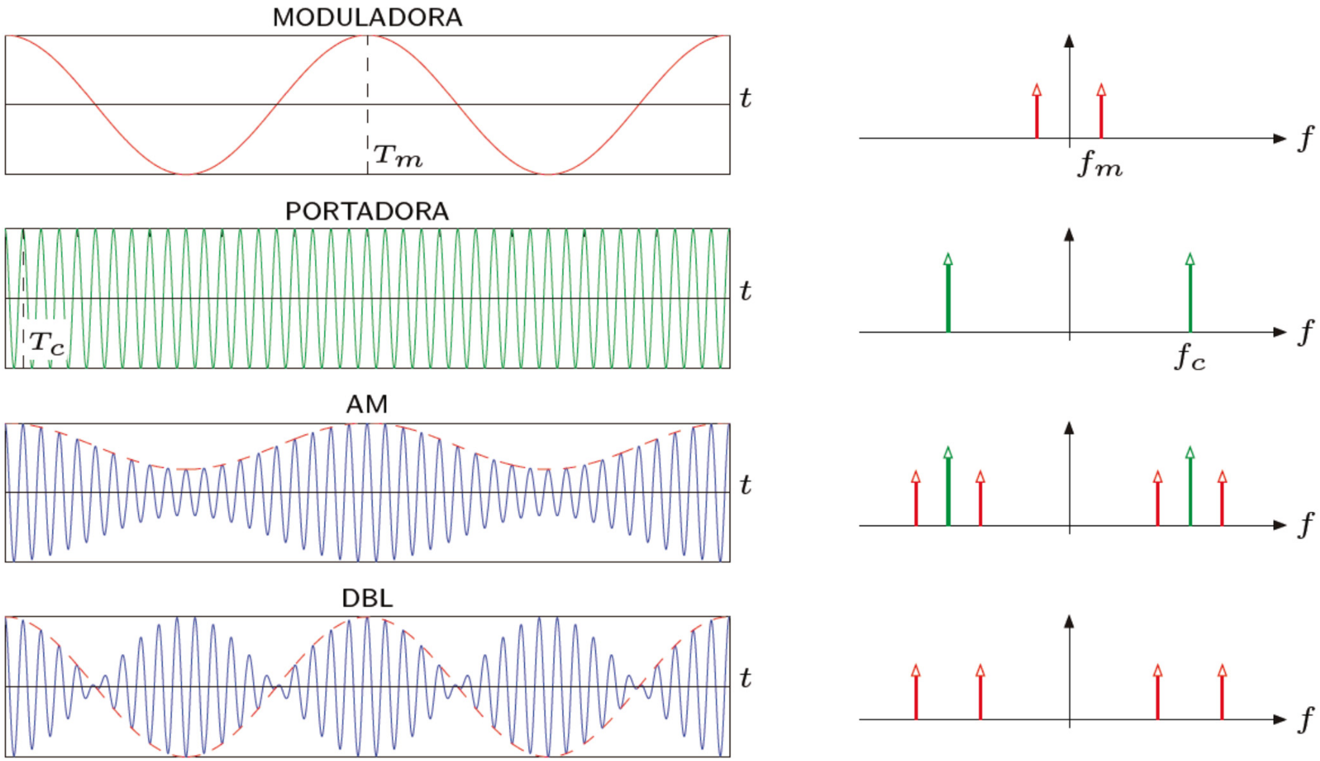
$$A_R\left[1+m\cdot x_n(t)\right]\cos(\omega_c t+\theta)\,A_c\cos(\omega_c t+\phi) =$$

$$= \frac{A_R\,A_c}{2}\left[1+m\cdot x_n(t)\right]\left[\cos(2\omega_c t+\theta+\phi)+\cos(\theta-\phi)\right]$$

$$\frac{A_R\,A_c}{2}\,m\,x_n(t)\cos(\theta-\phi)$$

Se requiere 'enganche en fase', para que $\theta=\phi \rightarrow \cos(\theta\text{-}\ \phi)=1$

Comparativa de modulaciones lineales



	Gestión de la potencia	Ancho de banda	Complejidad equipos
AM	Muy **mala**: - Envía una portadora con la mayor parte de la potencia - PEP mucho mayor que potencia media	Doble que la moduladora	**Sencillos** Gracias a que se envía una portadora es posible demodulación no coherente
DBL	Mejor: - Aunque PEP es mayor que potencia media	Doble que la moduladora	**Más complejos** Requiere demodulación coherente

Tema 5. Modulaciones analógicas

MODULACIONES ANGULARES

Modulación FM

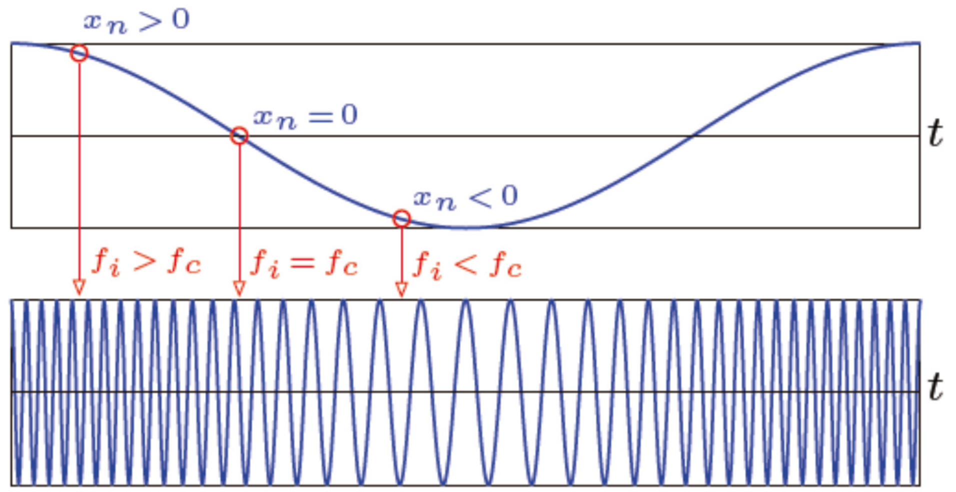
La frecuencia instantánea, $f_i(t)$, varía linealmente según la amplitud instantánea de la señal moduladora $x(t)$

$$f_i(t) = f_c + \Delta f \cdot x_n(t)$$

$\Delta f = A_m \cdot f_d$: máx. desv. de frecuencia (Hz)

A_m: valor de pico de la señal moduladora (V)

f_d : sensibilidad del modulador (Hz/V)



Definición de 'frecuencia instantánea'

$$f_i(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow \theta(t) = 2\pi\int_0^t f_i(\tau)\,d\tau = \omega_c t + 2\pi\,\Delta f\int_0^t x_n(\tau)\,d\tau \text{ : fase instantánea}$$

$$y(t) = A\cos\big(\underbrace{\omega_c t + \varphi(t)}_{\theta(t)}\big) \rightarrow y(t) = A\cos\left(\omega_c t + 2\pi\,\Delta f\int_0^t x_n(\tau)\,d\tau\right)$$

Expresión general de señal modulada FM, con cualquier señal moduladora

Potencias

La amplitud del
coseno no varía

$$y(t) = \boxed{A} \cos\left(\omega_c t + 2\pi\, \Delta f \int_0^t x_n(\tau)\, d\tau\right) \rightarrow p_y = \frac{A^2}{2R} = PEP$$

La potencia media es igual a la potencia equivalente de pico

La potencia media no depende de la señal moduladora

Envolvente constante

- ✓ Permite trabajar en zona no lineal de amplificadores

Modulación con un tono. Señal en el tiempo

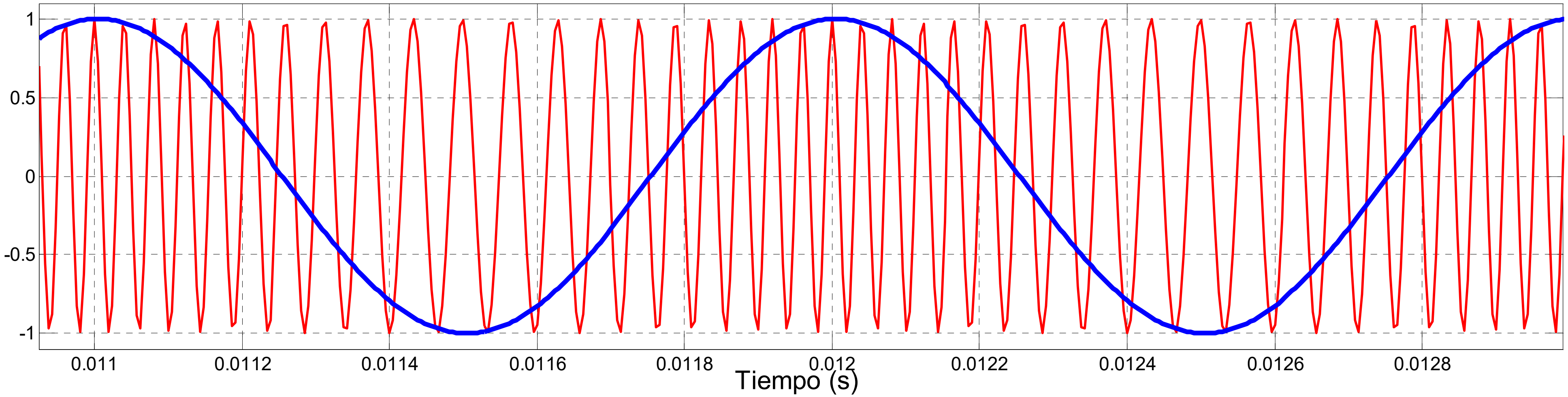
$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} \quad \left(\begin{array}{l} \text{índice de modulación con 1 tono} \\ \text{o máxima desviación de fase} \end{array} \right)$$

$$x(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

$$\theta(t) = \omega_c t + 2\pi\, \Delta f \int_0^t \cos(\omega_m \tau)\, d\tau = \omega_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \operatorname{sen}(\omega_m t)$$

$$y(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen}(\omega_m t))$$

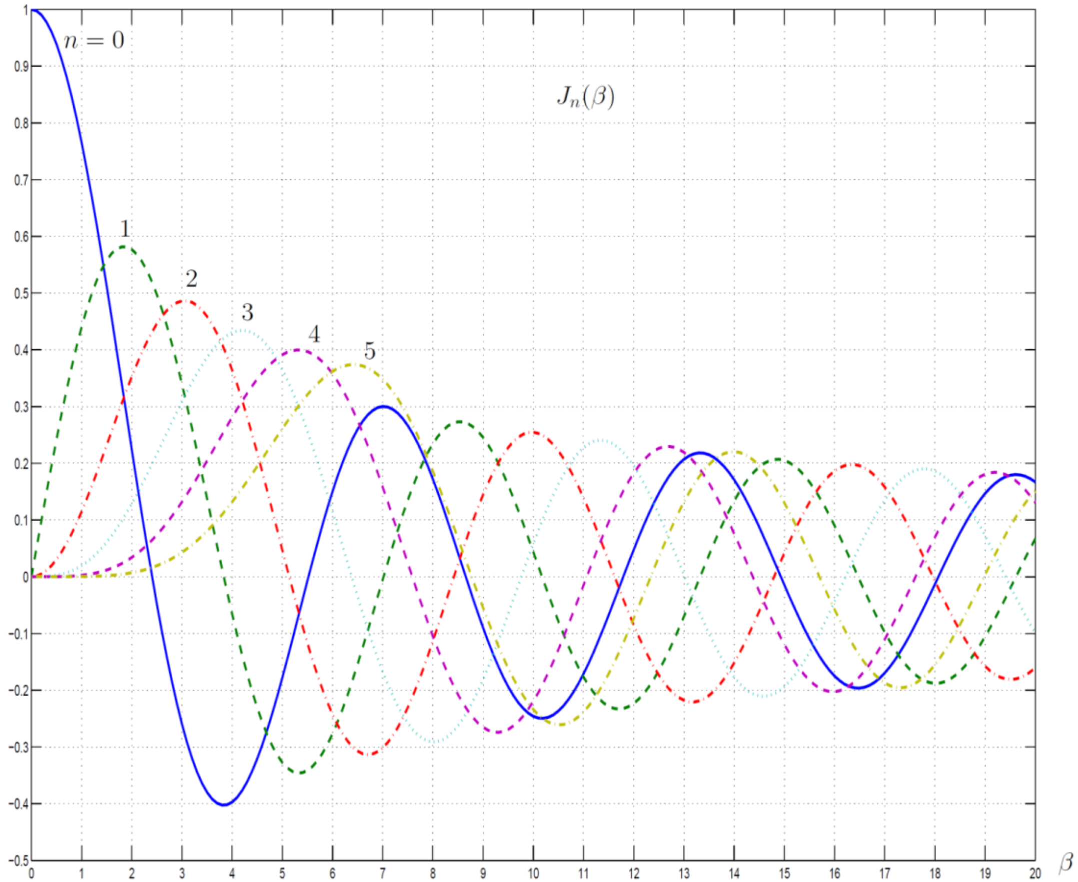
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \beta \cdot f_m \cos(\omega_m t)$$



Modulación con un tono. Espectro
Definición de funciones de Bessel

$$e^{j\beta \operatorname{sen}(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{J_n(\beta)}_{\text{Función de BESSEL de 1ª especie, orden } n\text{, argumento } \beta} e^{jn\omega_m t}$$

Para determinar el espectro de las señal modulada necesitaremos las funciones de Bessel



Propiedades:

1) $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$

2) Si $\beta < 0{,}1 \Rightarrow \begin{cases} J_0(\beta) \approx 1 \\ J_1(\beta) \approx \beta/2 \\ J_n(\beta) \approx 0\,,\ n > 1 \end{cases}$

3) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$

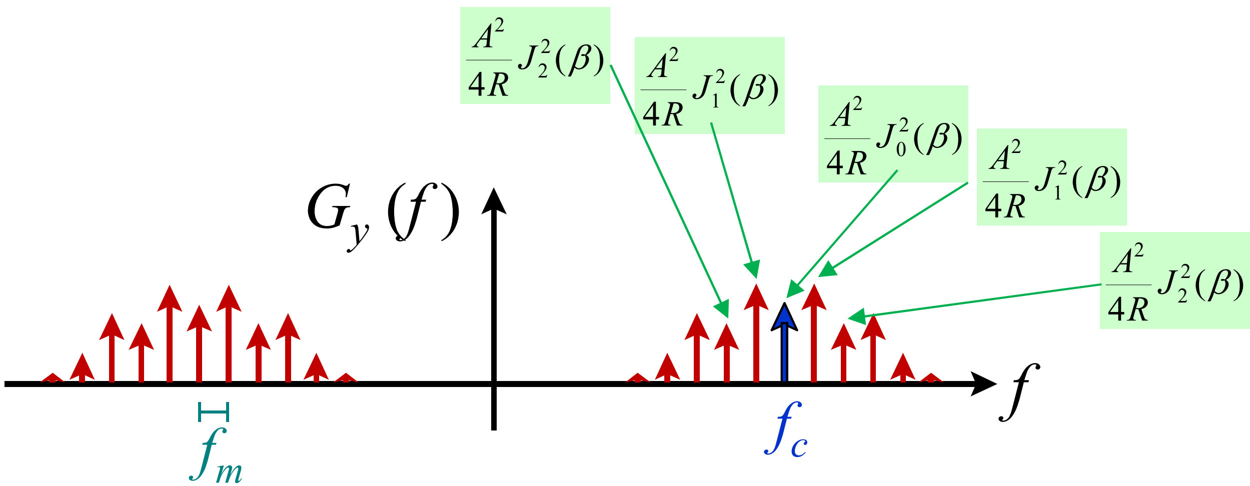
Modulación con un tono. Espectro

$$y(t) = A\cos\left(\omega_c t + \beta \operatorname{sen}(\omega_m t)\right) = A\,\mathbf{Re}\left\{e^{j\omega_c t} e^{j\beta \operatorname{sen}\omega_m t}\right\} = A\,\mathbf{Re}\left\{e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t}\right\} =$$

$$= A\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\,\mathbf{Re}\left\{e^{j(\omega_c + n\omega_m)t}\right\} = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos\left((\omega_c + n\omega_m)t\right)$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)\right]$$

$$G_y(f) = \frac{A^2}{4R}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)\left[\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)\right]$$



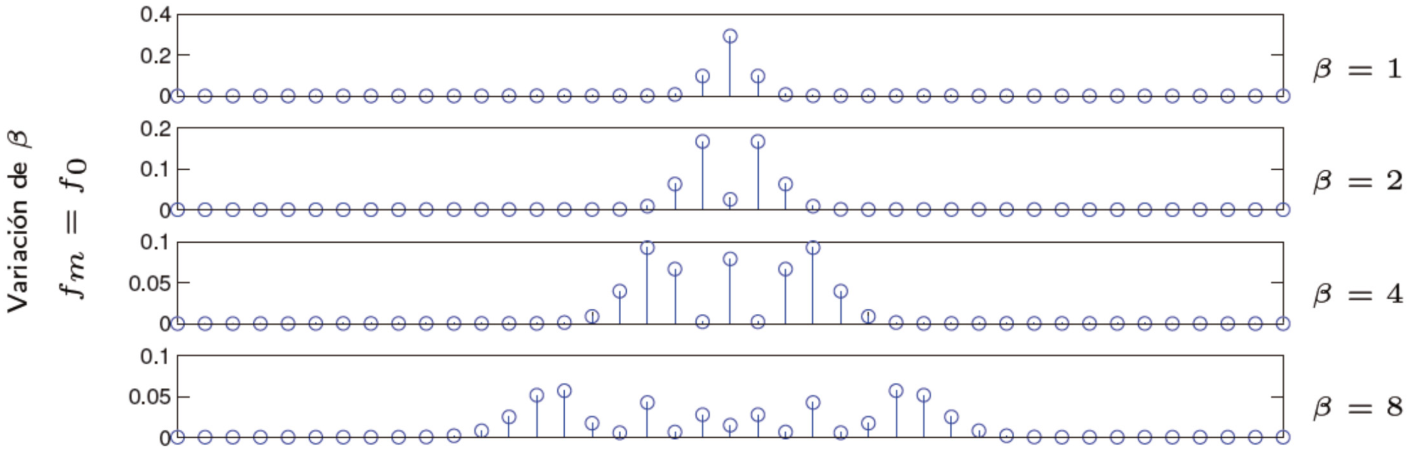
En un analizador de espectros (unilateral) las potencias son:

$$p_n = \frac{A^2}{2R}J_n^2(\beta)$$

Variación con β y f_m

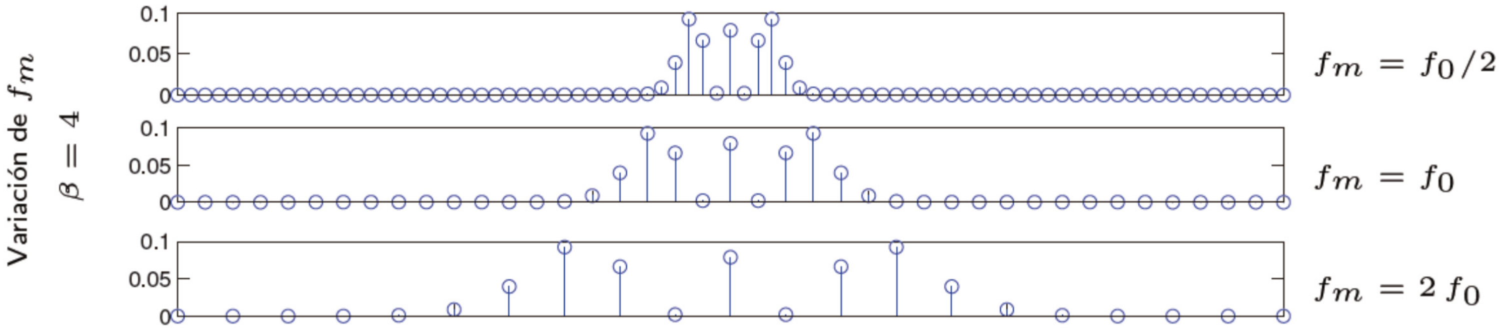
Fijamos f_m

Variamos β



Fijamos β

Variamos f_m



Observaciones sobre el espectro FM:

- Contiene infinitas líneas espectrales (deltas), pero sólo son significativas las próximas a f_c
- La separación entre 2 deltas contiguas es f_m
- La potencia total se obtiene sumando las contribuciones de todas las deltas
- Cuando crece β la potencia se reparte entre más deltas → aumenta ancho de banda ocupado

Ancho de banda

Regla de Carson

$$\boxed{B \approx 2(\Delta f + W)}$$

- ✓ Modulando con un tono de frecuencia f_m

$$B \approx 2(\Delta f + f_m) = 2 f_m (\beta + 1)$$

- ✓ Modulando con señal arbitraria de frecuencia máxima W
  - ❑ Se define una 'relación de desviación', D. Es un concepto análogo al índice de modulación con un tono β

$$\boxed{D = \frac{\Delta f}{W}} \qquad B \approx 2(\Delta f + W) = 2W(D+1)$$

Ejemplo. FM comercial

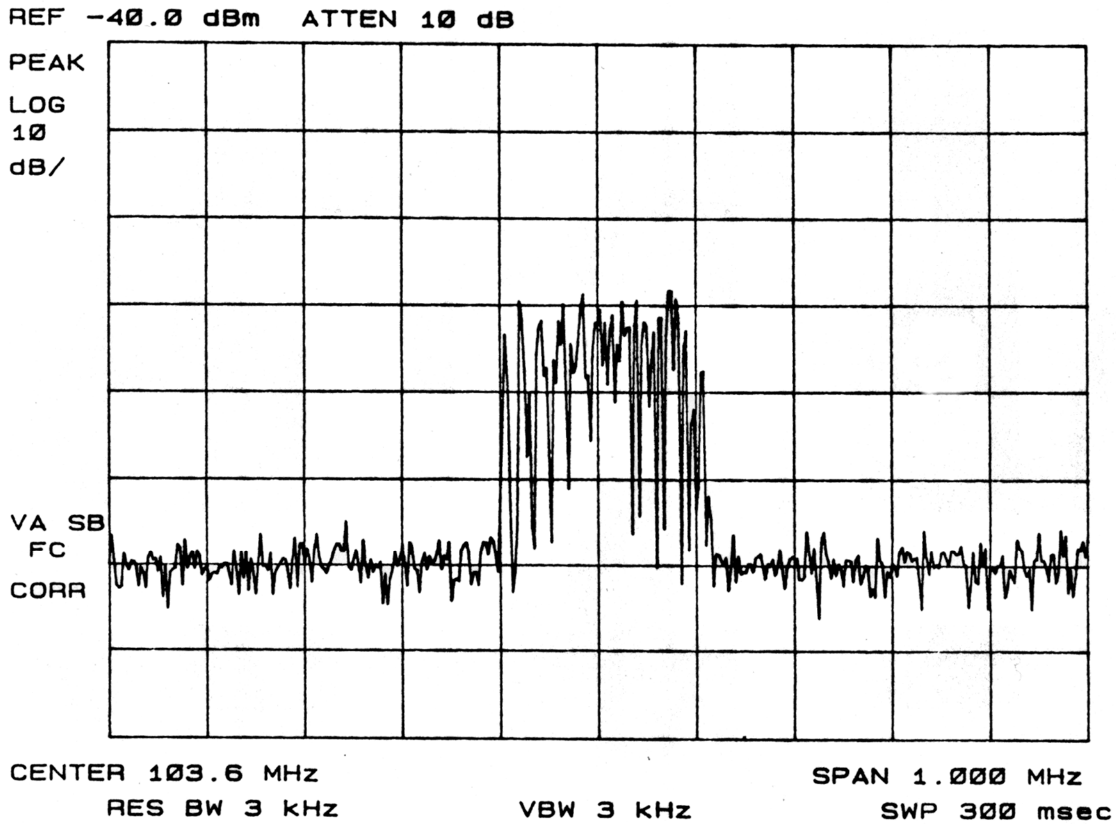
$\Delta f = 75$ kHz

$W = 15$ kHz

$$D = \frac{\Delta f}{W} = 5$$

$$B = 2W(D+1) =$$

$$= 2 \cdot 15 \cdot 6 = 180 \text{ kHz}$$



FM de banda estrecha

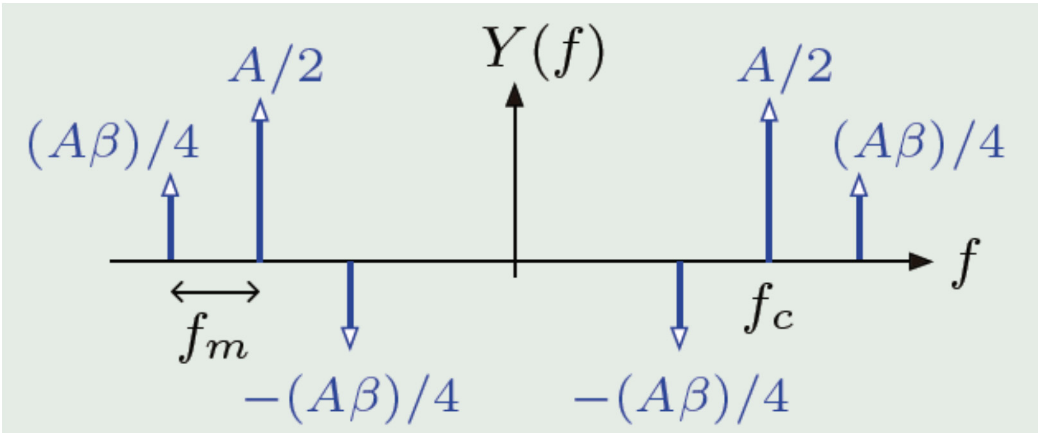
FM de banda estrecha modulada por un tono

- Si $\beta < 0{,}1$ sólo son relevantes 3 deltas

$$y(t) = A\sum_n J_n(\beta)\cos\left[(\omega_c + n\omega_m)t\right]$$

$$J_0(\beta) \approx 1; \quad J_1(\beta) \approx \beta/2; \quad J_n(\beta) \approx 0, n > 1$$

$$y(t) \cong A\cos(\omega_c t) + \frac{A\beta}{2}\left\{\cos\left[(\omega_c + \omega_m)t\right] - \cos\left[(\omega_c - \omega_m)t\right]\right\}$$



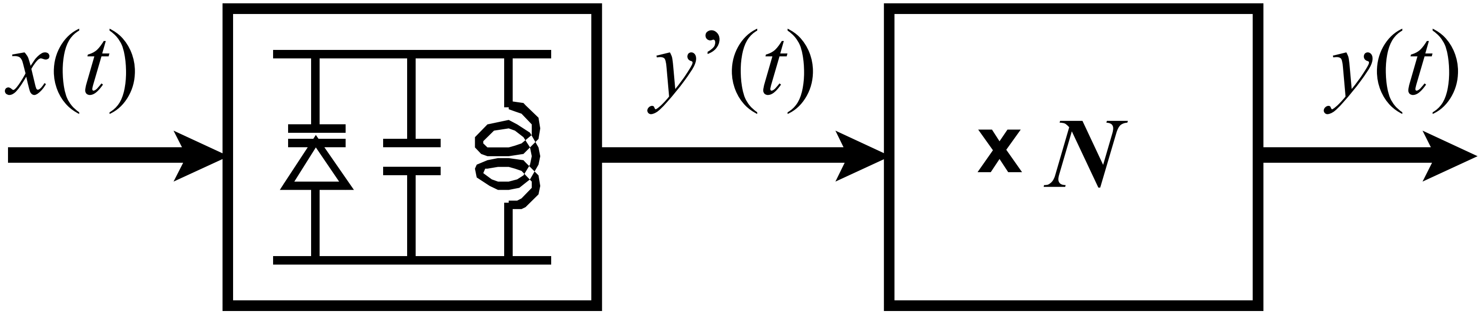
Modulador FM

Modulador directo

VCO

(oscilador controlado por tensión)

Multiplicador de frecuencia



Si $y'(t) = A\cos\left(\omega_c t + \varphi(t)\right) \rightarrow y(t) = A\cos\left(N \cdot \omega_c t + N \cdot \varphi(t)\right)$

Efecto del multiplicador de frecuencia:

$$f_c = N \cdot f_c'$$

$$\Delta f = N \cdot \Delta f'$$

No afecta a las frecuencias de la señal moduladora

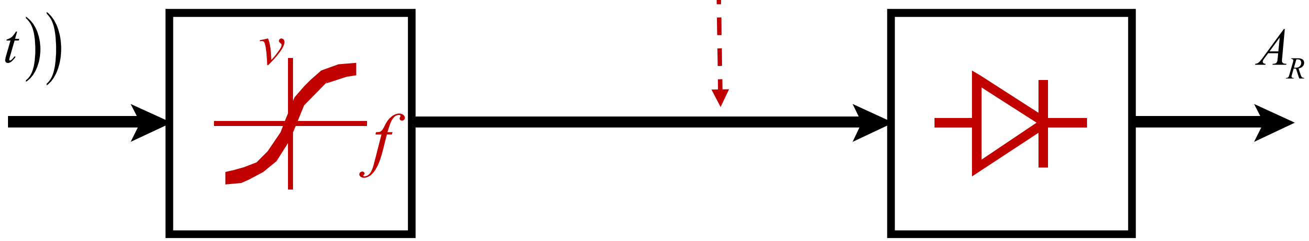
Demodulación FM

Demodulador básico. Por conversión FM-AM

$$-A_R\left(\omega_c+\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\cdot \mathrm{sen}\left(\omega_c t+\varphi(t)\right)$$

Envolvente de una AM

$$A_R\cos\left(\omega_c t+\varphi(t)\right)$$



$$A_R\frac{d\varphi(t)}{dt}\propto x(t)$$

Discriminador

(derivada con respecto al tiempo)

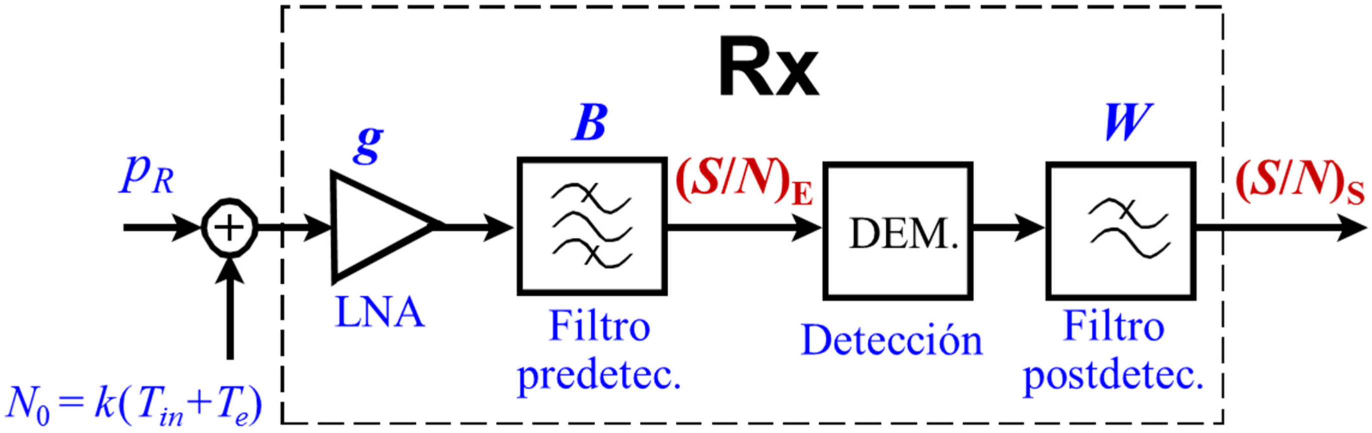
Detector AM

$$\left.\begin{array}{l} f_i(t)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\theta(t)}{dt}=\dfrac{1}{2\pi}\left(\omega_c+\dfrac{d\varphi(t)}{dt}\right)=f_c+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\varphi(t)}{dt} \\ f_i(t)=f_c+\Delta f\cdot x_n(t) \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{igualando}} x_n(t)=\frac{\Delta f}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\rightarrow x(t)\propto\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Tema 5. Modulaciones analógicas

CALIDAD

Diagrama de bloques del receptor



- p_R: potencia recibida a la entrada del receptor
- T_e: temperatura equivalente de todos los elementos del receptor, referida a la entrada
- B: ancho de banda de la señal modulada
- W: ancho de banda de la señal moduladora
- $(S/N)_E$: relación señal-ruido equivalente antes del demodulador (incluye el ruido del demodulador)
- $(S/N)_S$: relación señal-ruido final a la salida

Observaciones

- $(S/N)_E$ puede calcularse también a la entrada del receptor, si consideramos su temperatura de ruido equivalente:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{p_R}{k\left(T_{in} + T_e\right)B}$$

- Se define un nuevo parámetro z, que es una calidad equivalente 'normalizada' a la entrada del demodulador: usando W en lugar de B

$$\boxed{z = \frac{p_R}{n_0 W} = \frac{p_R}{k\left(T_{in} + T_e\right)W}}$$

  - ✓ z se define, en principio, a la entrada del demodulador o detector. Pero es más cómodo trabajar con parámetros a la entrada del receptor, utilizando siempre el ruido total disponible en ese punto

- La relación entre $(S/N)_E$ y $(S/N)_S$ depende de:
  - ✓ El tipo de modulación
  - ✓ Tecnología usada en el demodulador (coherente, no coherente…)

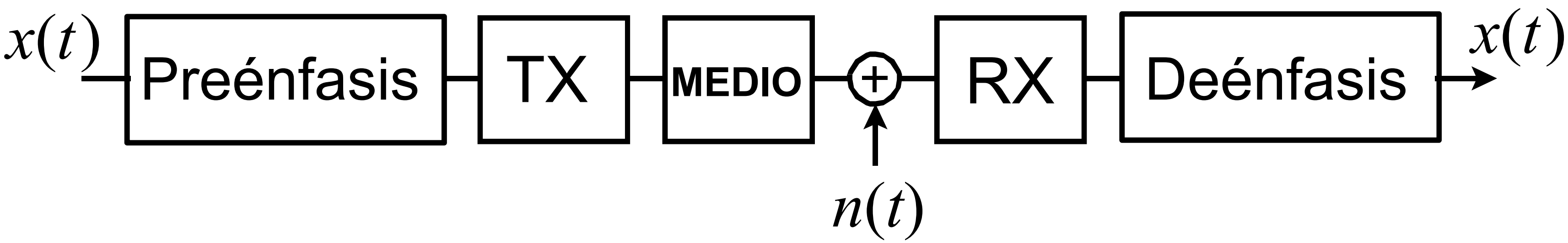
Tabla resumen

	AM	DBL	FM
$(s/n)_e$	$z/2$	$z/2$	$\dfrac{z}{2(D+1)}$
$(s/n)_s$	$z\dfrac{m^2\langle x_n^2\rangle}{1+m^2\langle x_n^2\rangle}$	z	$3\cdot D^2\cdot\langle x_n^2\rangle z\cdot M$

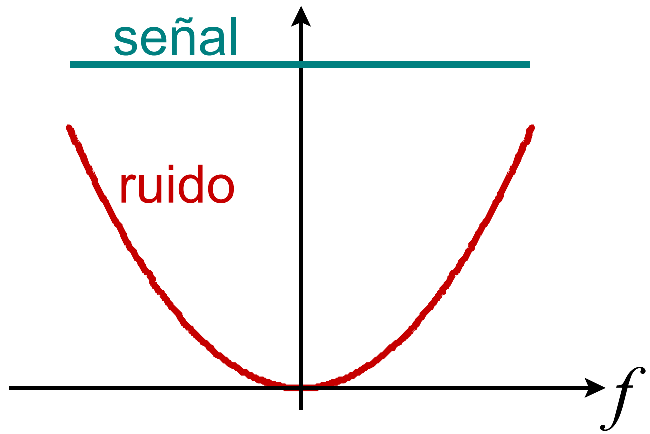
Observaciones sobre calidad en FM

1. Al incrementar la relación de desviación, D, *la* calidad aumenta significativamente (en un factor D^2) pero también aumenta el ancho de banda: $2\cdot W\cdot(D+1)$
2. Si la señal moduladora es un tono, basta tomar β en lugar de D
3. El parámetro M es la mejora por preénfasis/deénfasis, expresado en unidades naturales
4. Debe verificarse que z es mayor que el umbral: $z > z_u = 40\cdot(D+1)$

FM: preénfasis y deénfasis



Técnica para mejorar la $(S/N)_S$ en FM



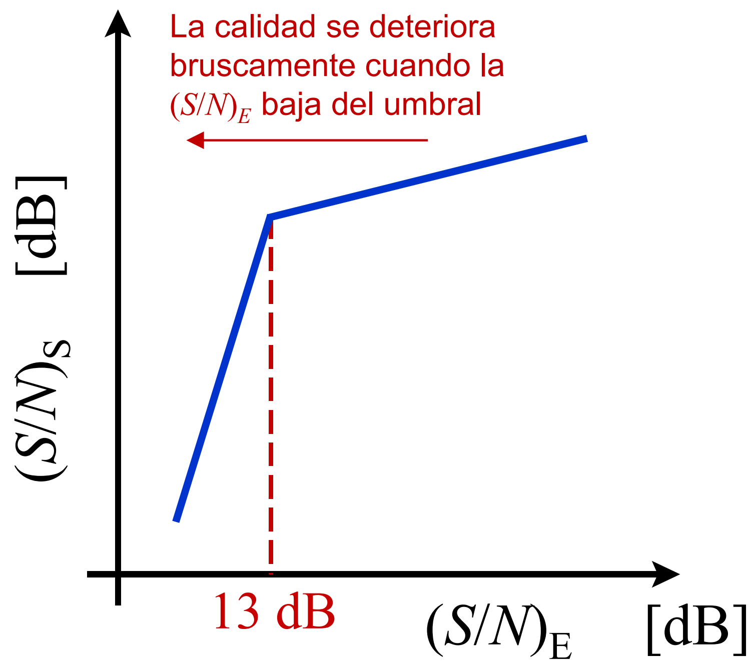
- ✓ El ruido tras el detector tiene un espectro parabólico
- ✓ Se **predistorsiona** la señal en el transmisor para acentuar las altas frecuencias
- ✓ En el receptor se realiza la operación inversa
- ✓ Equivale a mejora en $(S/N)_S$ en un factor M

$$M \approx \frac{1}{3\left(f_{corte}/W\right)^2} \quad \left(\text{veces de potencia}\right) \rightarrow 10\log M \quad \left(\text{en dB}\right)$$

f_{corte} : frec. de corte de los filtros de preénfasis/deénfasis

FM: efecto umbral

- Para que el demodulador de FM funcione adecuadamente se requiere una $(S/N)_E$ mínima: típicamente 13 dB (20 veces)
  - ✓ Debe verificarse que se cumple



$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2(D+1)} > 20$$

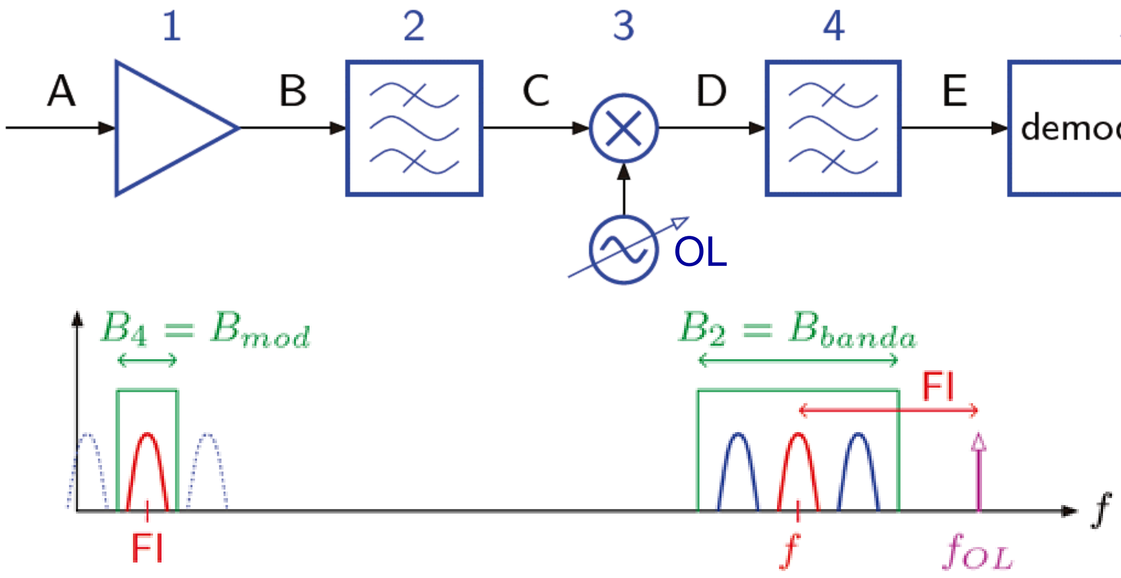
$$z > \boxed{40(D+1)}$$

z_u: umbral

Receptor superheterodino

- Se utiliza tanto en modulaciones analógicas y digitales, lineales o no
  - ✓ La mayoría de los receptores son heterodinos
- Idea:
  - ✓ Permite sintonizar diferentes canales de una banda
    - Variando solo una pequeña parte del RX
    - El resto de la circuitería sirve para cualquier canal
  - ✓ Se realiza una conversión de frecuencia hacia abajo (*down conversion*), mezclando y filtrando (heterodino = que mezcla)
  - ✓ Se mezcla la señal recibida con el tono generado por un **O**scilador **L**ocal (OL)
  - ✓ El proceso de *down conversion* permite trabajar a una frecuencia baja (**F**recuencia **I**ntermedia, FI), lo que permite una demodulación mucho más sencilla

Receptor superheterodino



A: banda completa de señales (canales)

1: amplificador de RF para toda la banda

2: filtro de RF, deja pasar toda la banda

OL: oscilador local, tono de frec. variable para sintonizar diferentes canales

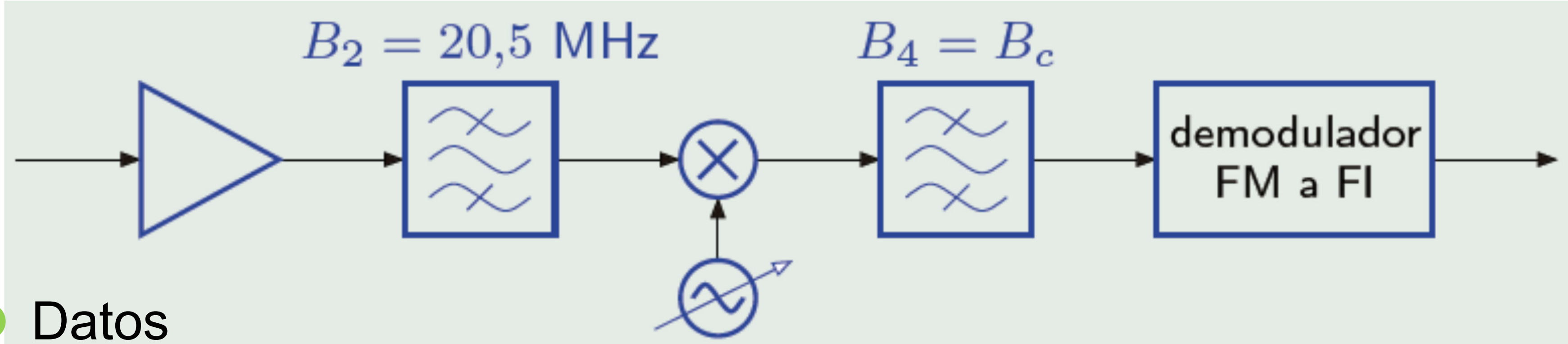
3: mezclador, produce batidos de la banda con el tono del OL

D: batidos $f \pm f_{OL}$

4: filtro de frecuencia intermedia (FI) , deja pasar el canal (ancho de banda de la señal modulada)

E: una sola señal (canal), centrada en $FI = f - f_{OL}$ (o bien $FI = f_{OL} - f$)

Ejemplo. Radiodifusión de FM comercial



- Datos
  - ✓ Rango de frecuencias a recibir: de 87,5 a 108 MHz. Igual a la banda de paso del primer filtro
  - ✓ FI: 10,7 MHz
  - ✓ Δf = 75 kHz
  - ✓ Ancho de banda de moduladora: W = 15 kHz
  - ✓ $B_4 = B_c$ = 2($\Delta f + W$) = 180 kHz
- Para sintonizar emisora en f = 92,4 MHz
  - ✓ FI = $f_{OL} - f \rightarrow$ 10,7 = f_{OL} - 92,4
  - ✓ f_{OL} = 103,1 MHz (también podría utilizarse 81,7 MHz)
  - ✓ (aunque el dial nos marca 92,4 en lugar de 103,1)