

Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones
Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen
Grado en Ingeniería Telemática

Tema 9

Modulaciones digitales



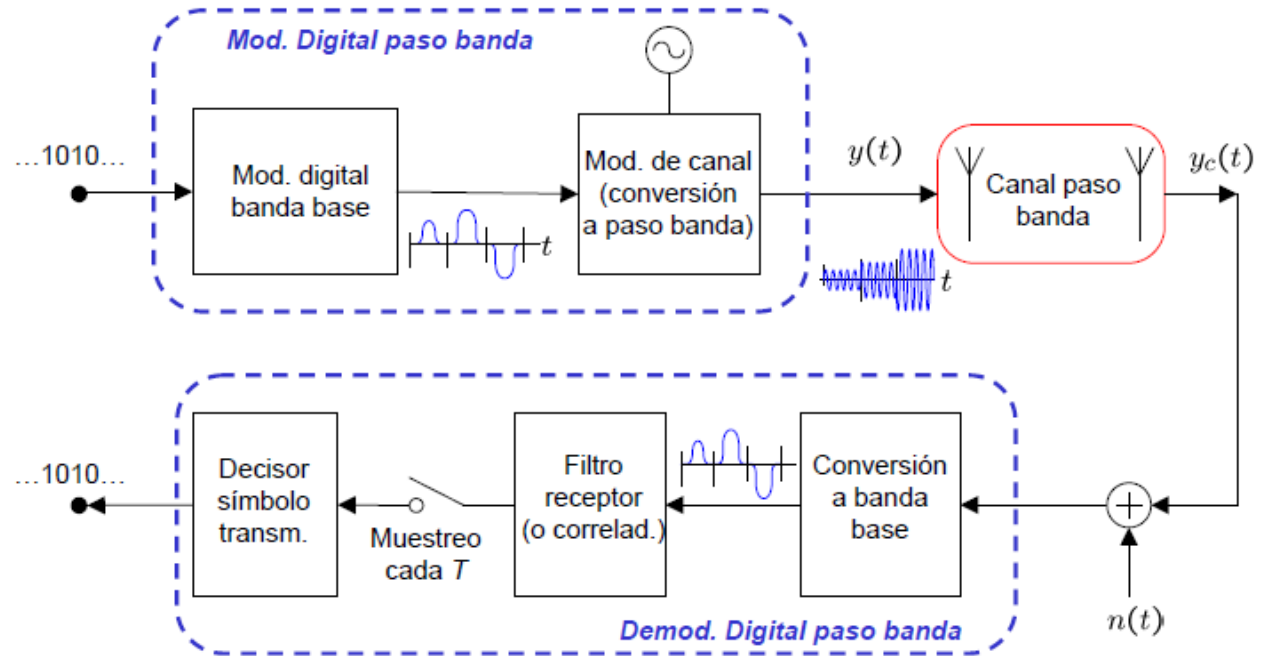
Modelo de sistema de comunicaciones paso banda

Modulador **banda base**

Convierte bits en señales banda base (ej. PAM)

Modulador de **canal**

Traslada el contenido espectral a altas frecuencias



Objetivos de diseño:

- Maximizar **velocidad binaria**
- Minimizar **probabilidad de error**
- Minimizar la **potencia** transmitida
 - ✓ Potencia media
 - ✓ Potencia equivalente de pico
- Minimizar **ancho de banda** ocupado



PAM banda base (Pulse Amplitude Modulation)

$$s_i(t) = A_i \cdot g(t), 0 \leq t \leq T$$

$$A_i = (2i - 1 - M) \frac{\Delta}{2}$$

$g(t)$: pulso conformador (o filtro transmisor)

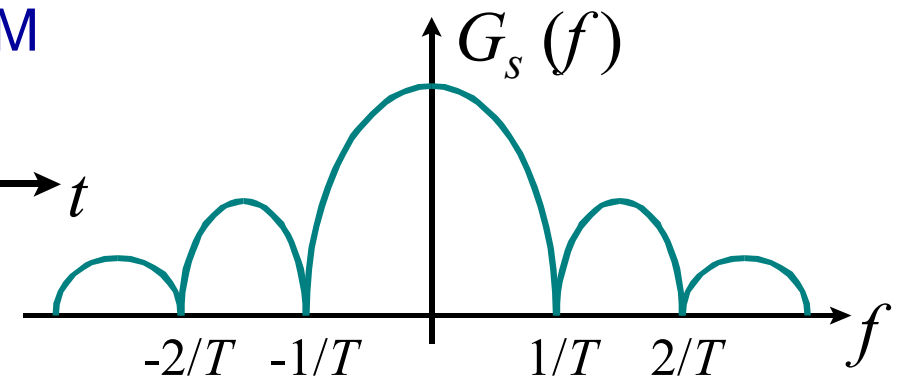
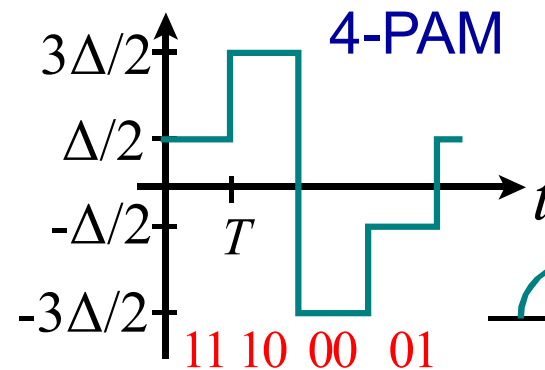
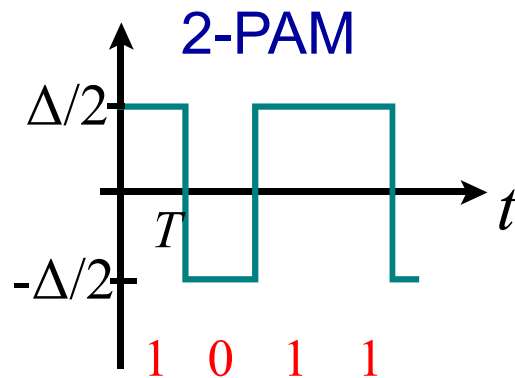
Ancho de banda de señales banda base

Rectangular $B = 1/T = R_s$ [entre nulos]

sinc $B = 1/2T = R_s/2$

Coseno alzado $B = \frac{1}{2T}(1 + \alpha) = \frac{R_s}{2}(1 + \alpha)$

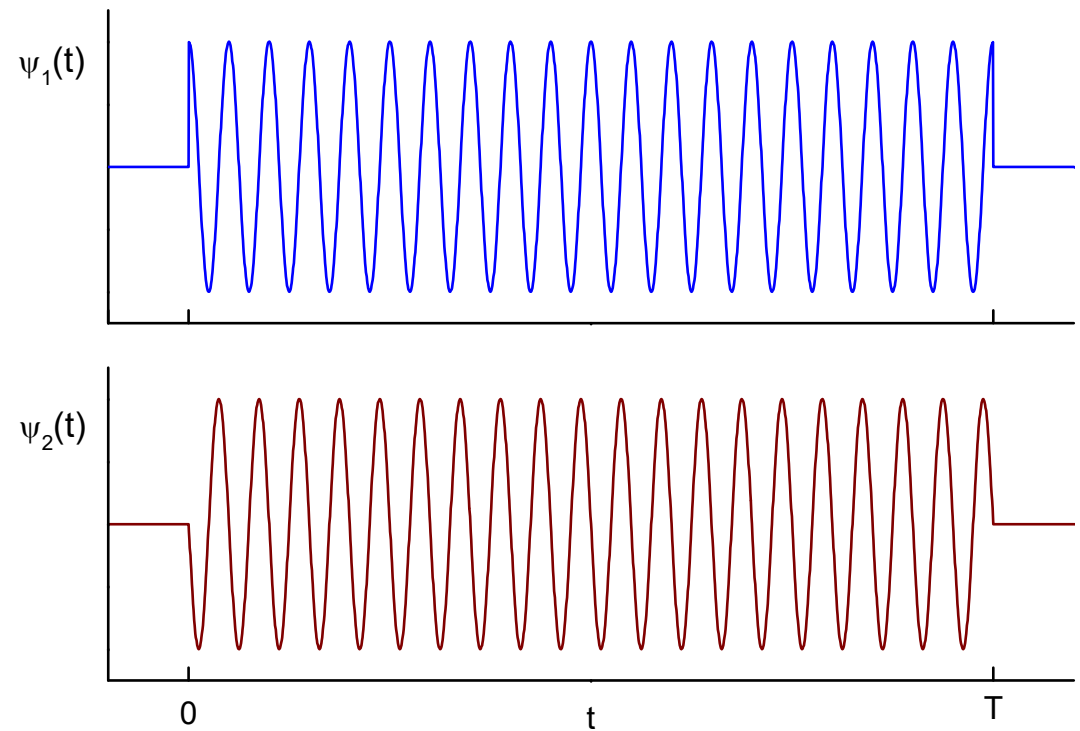
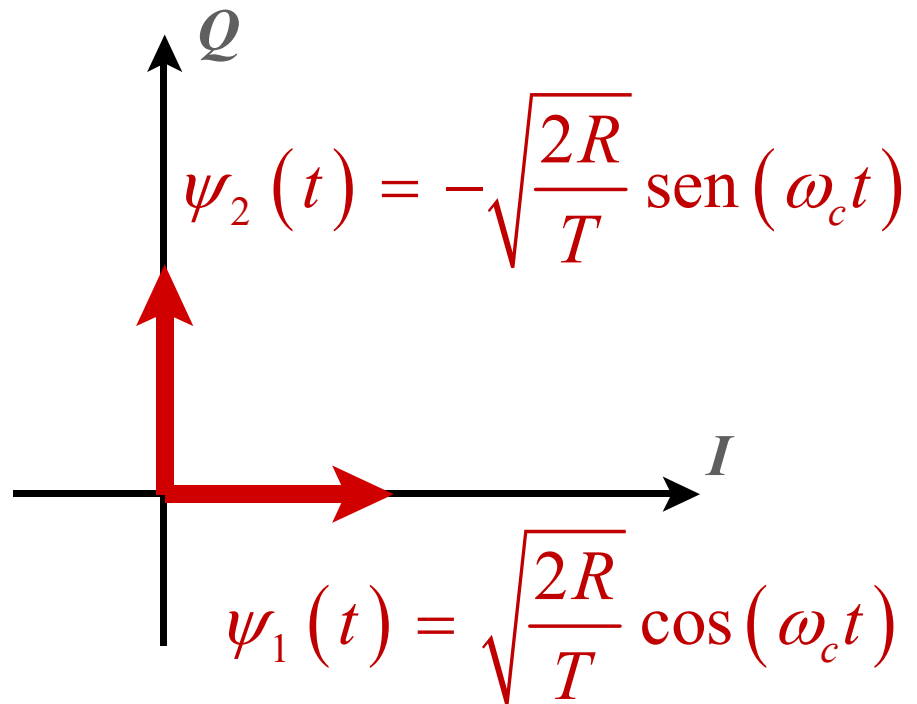
Ejemplo. Pulsos $g(t)$ rectangulares



Tema 9. Modulaciones digitales

MODULACIONES LINEALES

Base en fase-cuadratura



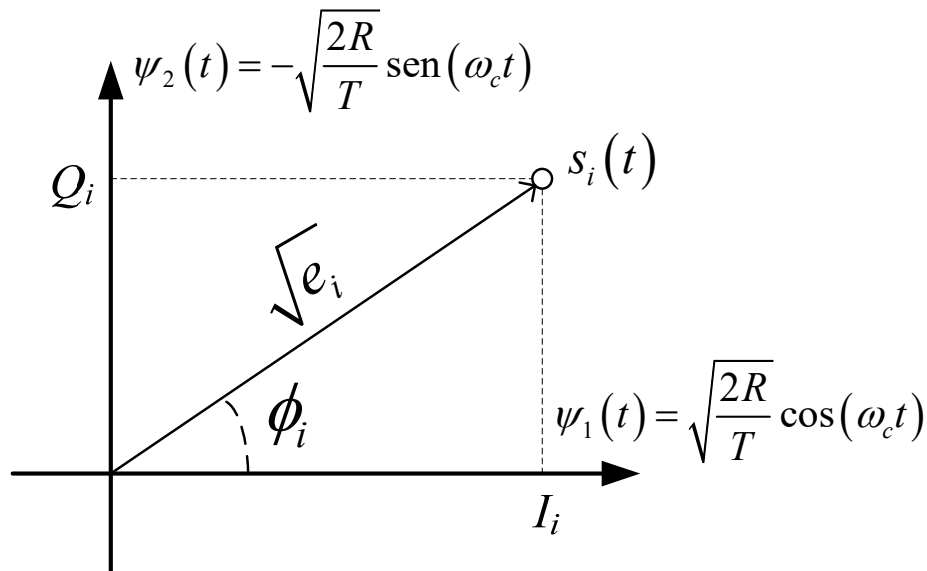
Fórmulas básicas

$$R_s = 1/T = R_b / \log_2 M : \text{régimen simbólico (baudios)}$$

$$e_b = e_s / \log_2 M$$

$$R_b / B \text{ [bps/Hz]} : \text{eficiencia espectral}$$

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A_i \cos(\omega_c t + \phi_i) = A_i \cos(\phi_i) \cos(\omega_c t) - A_i \sin(\phi_i) \sin(\omega_c t) = \\ &= \underbrace{\sqrt{e_i} \cos(\phi_i)}_{I_i} \underbrace{\sqrt{\frac{2R}{T}} \cos(\omega_c t)}_{\psi_1(t)} + \underbrace{\sqrt{e_i} \sin(\phi_i)}_{Q_i} \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{2R}{T}} \sin(\omega_c t)\right)}_{\psi_2(t)} \end{aligned}$$



$$e_i = p_i \cdot T = \left(\frac{A_i^2}{2R} \right) \cdot T \rightarrow A_i = \sqrt{e_i} \sqrt{\frac{2R}{T}}$$

$$e_s (\text{energía media símbolo}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i$$

$$PEP = \frac{A_{i \max}^2}{2R}, \bar{p} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{A_i^2}{2R}$$

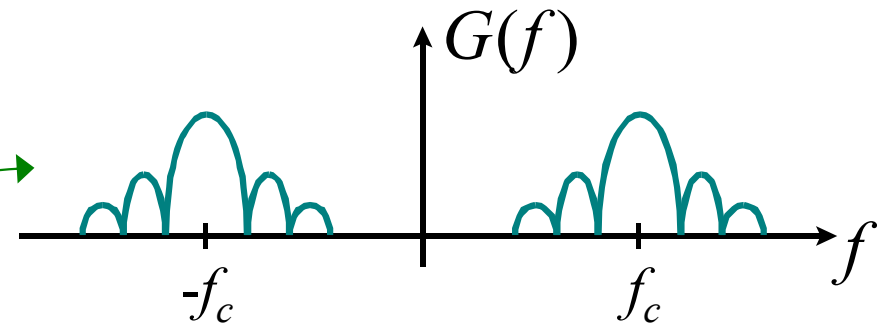
$$e_{R \Omega} = \frac{e_{1 \Omega}}{R} \text{ (desnormalización para } R \neq 1 \Omega \text{)}$$



Espectro

El ancho de banda se duplica al pasar de banda base a paso banda (modulada)

$$B_{MOD. LINEAL} = 2 \cdot B_{PAM}$$

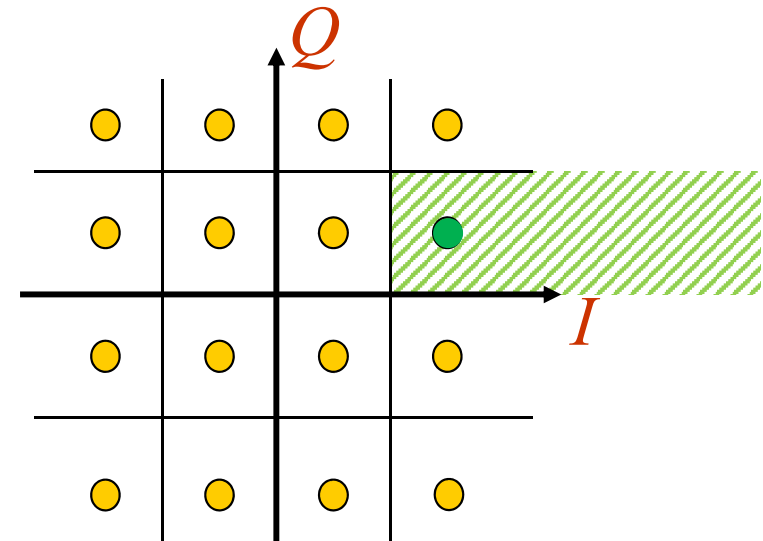
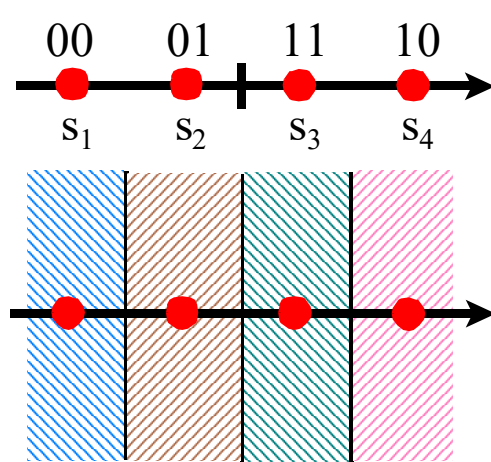


$g(t)$	B (Hz)	Eficiencia espectral (bits/Hz)
Pulsos rectangulares	$2 R_s$	$(\log_2 M)/2$
Pulsos sinc	R_s	$\log_2 M$
Pulsos en coseno alzado	$R_s (1 + \alpha)$	$\frac{\log_2 M}{(1 + \alpha)}$

Probabilidad de error, P_b o BER (Bit Error Rate)

○ Regiones de decisión

✓ Con símbolos equiprobables: umbrales equidistantes



○ Relación entre P_b y P_s

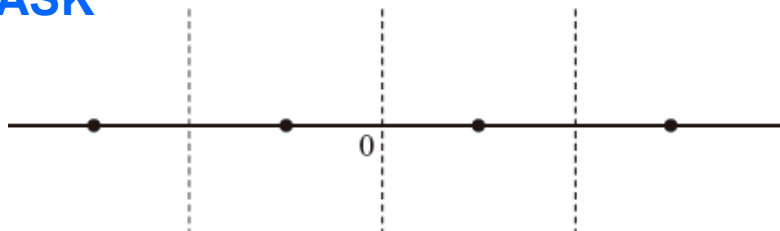
Código de **Gray**: entre símbolos contiguos sólo cambia 1 bit

Si los errores se producen exclusivamente entre símbolos contiguos:

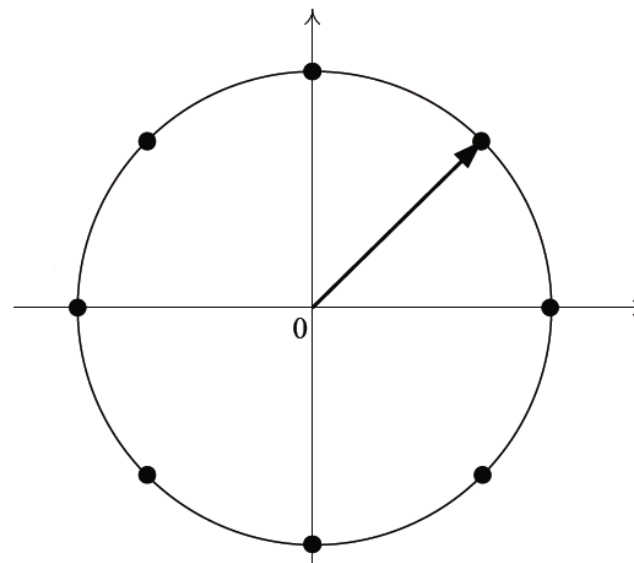
$$P_b = \frac{P_s}{\log_2 M}$$

Ejemplos de constelaciones de diferentes familias de modulaciones lineales

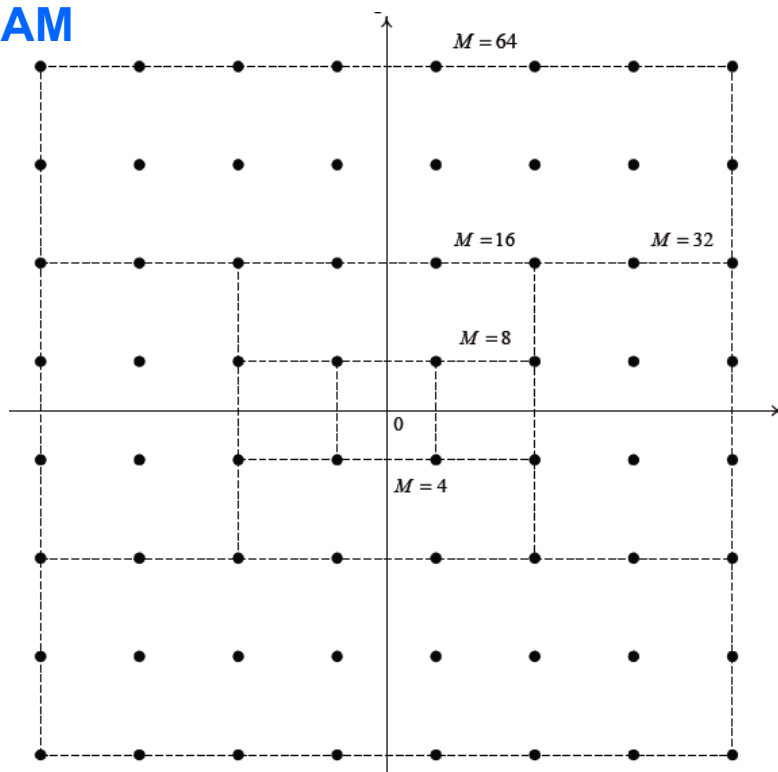
ASK



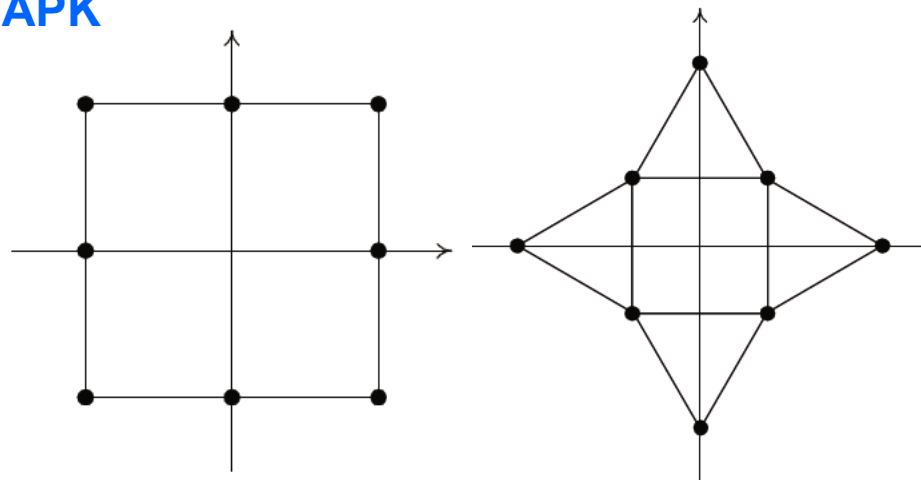
PSK



QAM



APK



Modulaciones lineales

ASK (AMPLITUDE SHIFT KEYING)

ASK: modulación por desplazamiento de amplitud

Equivale a una modulación DBL en la que se utilizaran M niveles discretos procedentes de una PAM banda base

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2R}{T}} \cos(\omega_c t) \quad : \text{base de dimensión 1}$$

$$s_i(t) = A_i \cdot \cos(\omega_c t) = \sqrt{e_i} \sqrt{\frac{2R}{T}} \cos(\omega_c t) = \sqrt{e_i} \psi(t)$$

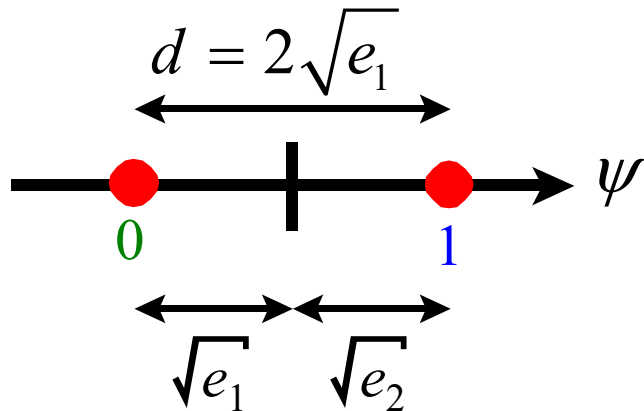
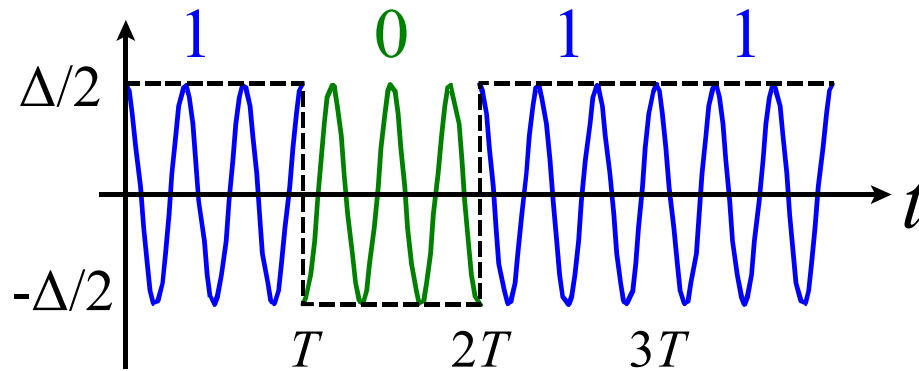
$$A_i = (2i - 1 - M) \frac{\Delta}{2} \quad [\text{amplitudes en V}]$$

$$e_i = \frac{A_i^2}{2R} T \Rightarrow A_i = \sqrt{e_i} \sqrt{\frac{2R}{T}}$$

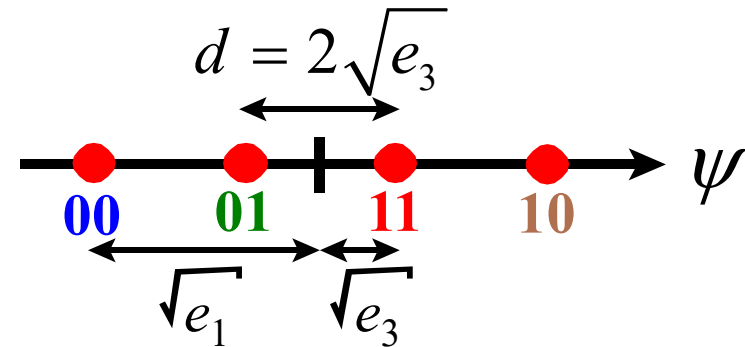
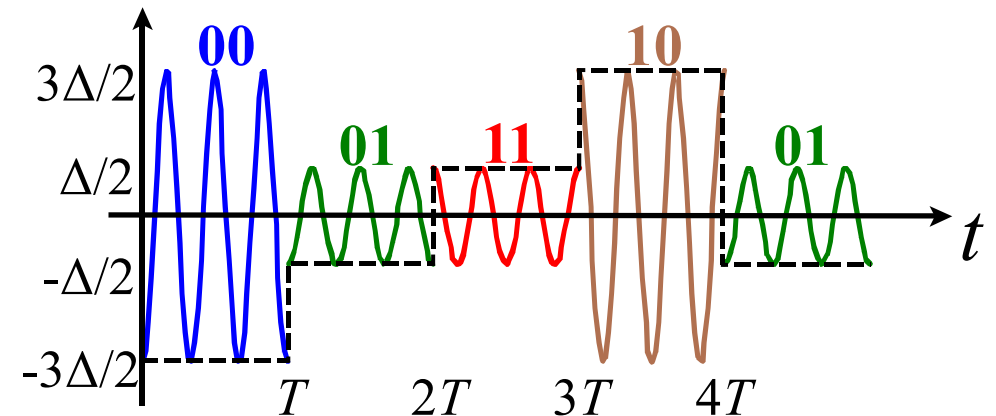
$$i = 1, 2 \quad M$$



2-ASK, 4-ASK



$$\sqrt{e_s} = \frac{d}{2} \rightarrow e_s = e_1 = e_2 = \frac{d^2}{4}$$



$$e_2 = e_3 = \left(\frac{d}{2}\right)^2; e_1 = e_4 = \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = 9 \cdot e_2 = 9 \cdot e_3$$

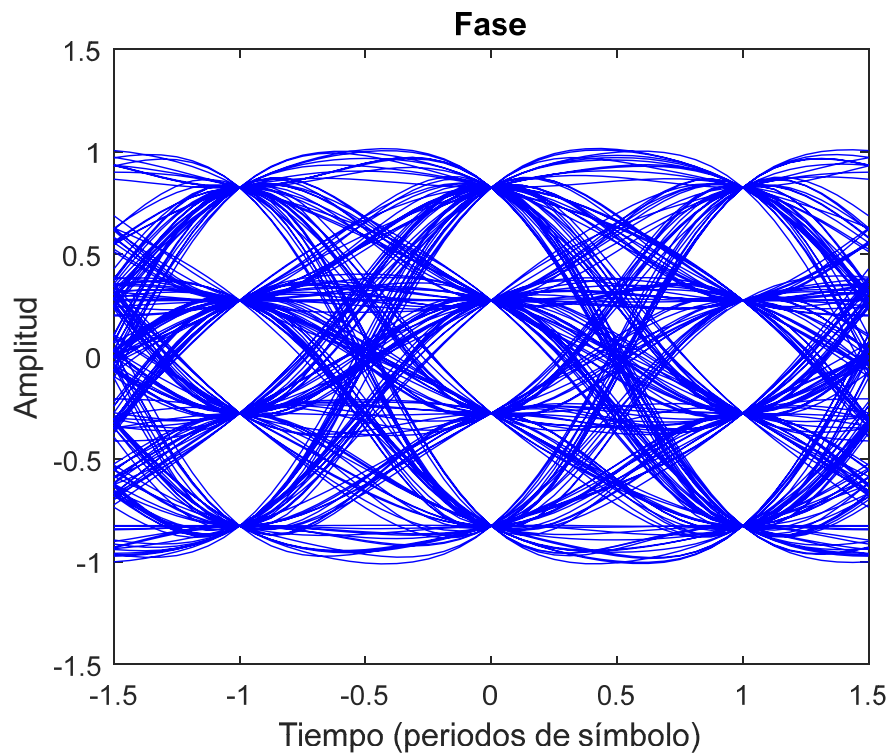
$$e_s = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 \right) = \frac{5d^2}{4}$$

$$PEP = 1,8 \cdot \bar{p}$$

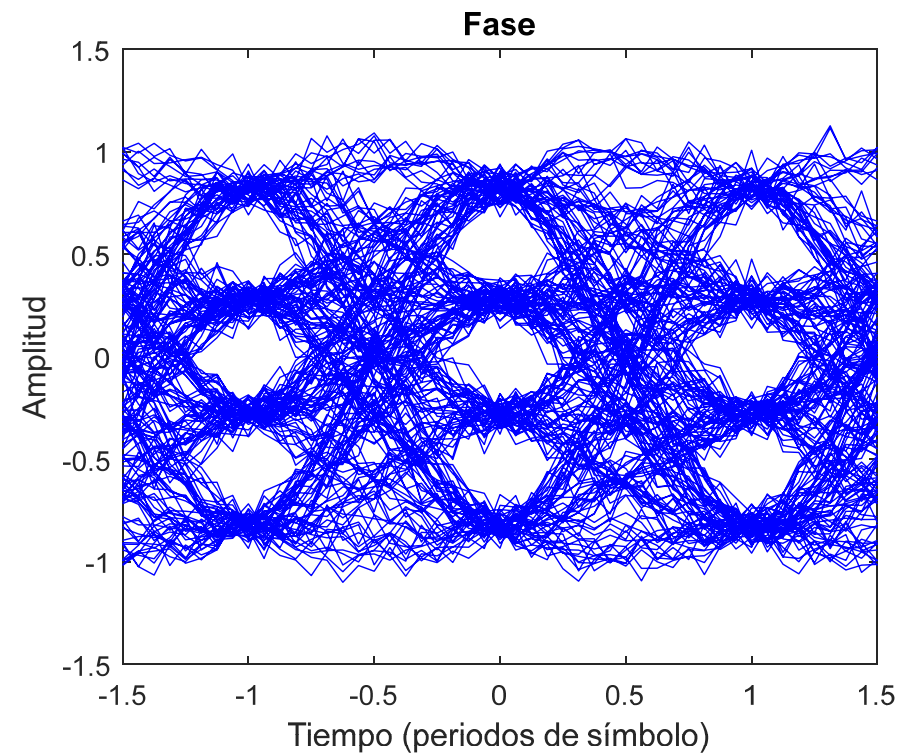


Diagramas de ojo en 4-ASK

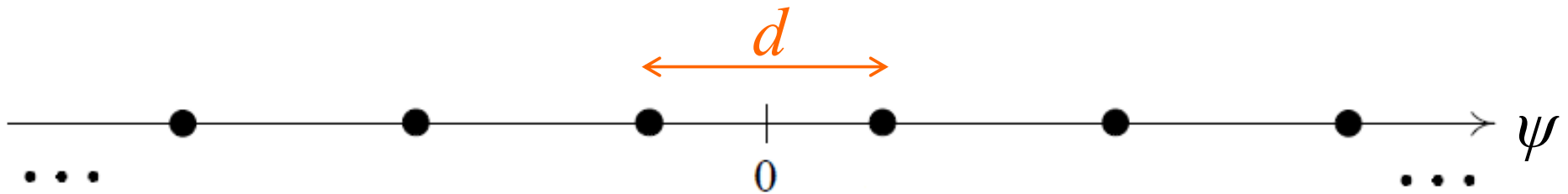
Señal transmitida



Señal recibida (con ruido AWGN añadido)



Generalización para M-ASK

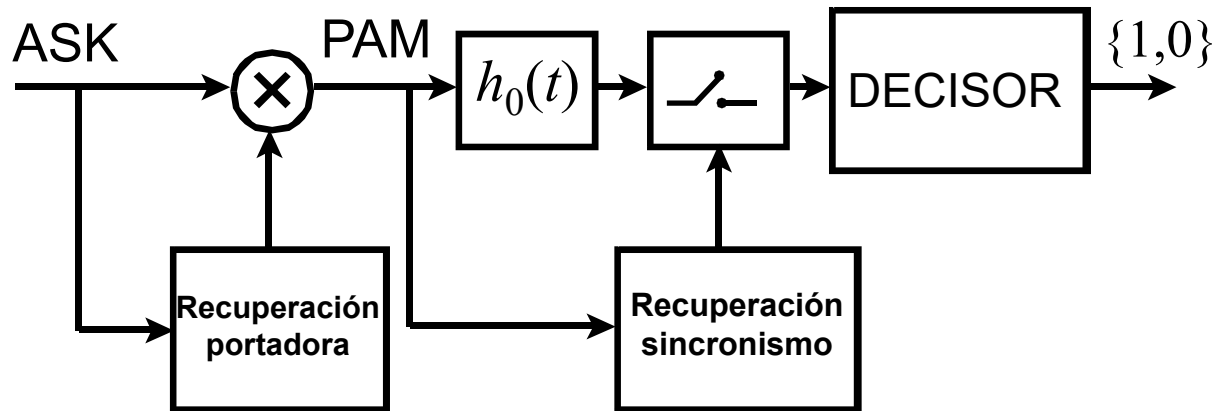


$$\sqrt{e_i} = (2i - 1 - M) \frac{d}{2}$$

$$e_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i = \frac{d^2}{4M} \sum_{i=1}^M (2i - 1 - M)^2 = \frac{(M^2 - 1)d^2}{12}$$

$$d = \sqrt{\frac{12e_s}{M^2 - 1}} = \sqrt{\frac{12(\log_2 M)e_b}{M^2 - 1}}$$

ASK. Diagrama de bloques de un demodulador coherente



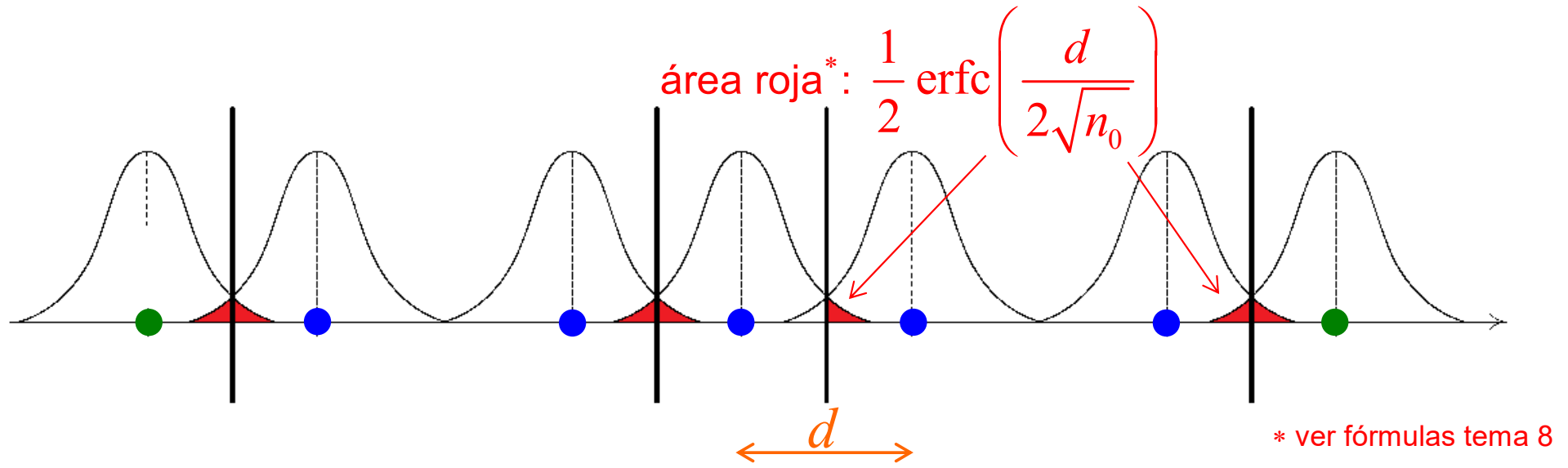
Señal recibida ASK: $v(t) \cdot \cos(\omega_c t)$

Recuperación portadora: $\cos(\omega_c t)$

Demodulación:

$$\left[v(t) \cdot \cos(\omega_c t) \right] \cdot \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{1}{2} v(t)}_{\text{PAM}} + \frac{1}{2} v(t) \cdot \underbrace{\cos(2\omega_c t)}_{\text{Se filtra paso bajo}}$$

ASK. Probabilidad de error (I)



$$P(\text{error}|s_i) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{n_0}}\right) \text{ extremos (2 símbolos)}$$

$$P(\text{error}|s_i) = \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{n_0}}\right) \text{ resto de símbolos (M-2 símbolos)}$$

$$P_{\text{error}} = \sum_{i=1}^M P(s_i) \cdot P(\text{error}|s_i) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{n_0}}\right)$$

ASK. Probabilidad de error (II)

- Teniendo en cuenta la relación entre d y e_b (página 11):

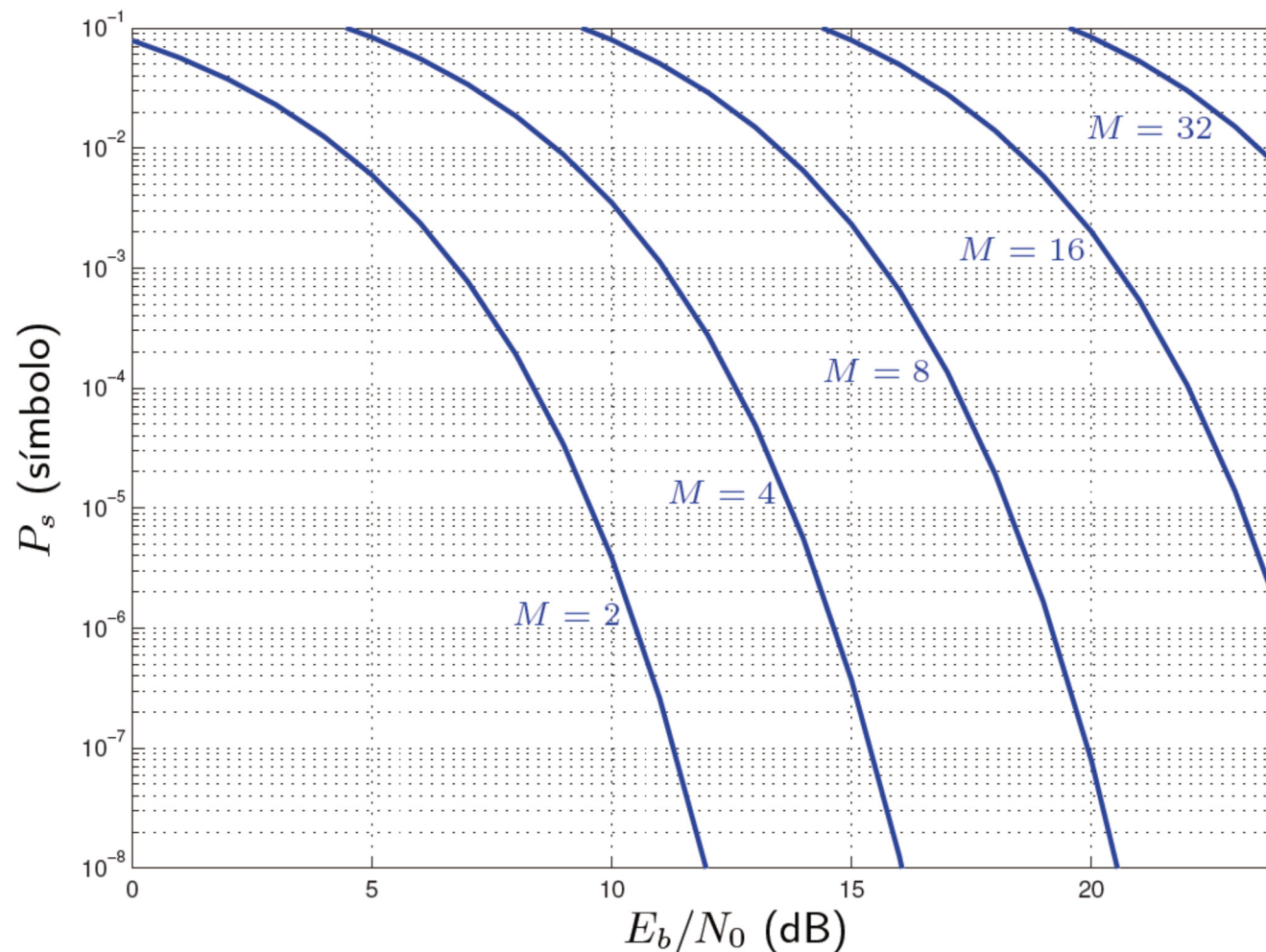
$$d = \sqrt{\frac{12(\log_2 M) e_b}{M^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{n_0}}\right) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3(\log_2 M) e_b}{M^2 - 1} \frac{1}{n_0}}\right) = \\ &= \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1} \frac{e_s}{n_0}}\right) \end{aligned}$$

Nota: e_b/n_0 y e_s/n_0 en veces de potencia, no en dB



ASK. Probabilidad de error (III)



Notas:

- El eje vertical es logarítmico. Muestra la probabilidad de símbolo erróneo (no confundir con P_b)
- El eje horizontal es lineal. Muestra la relación E_b/N_0 (dB), es una relación S/N
- Mejor calidad (P_s menor) requiere una E_b/N_0 mayor



Modulaciones lineales

PSK (PHASE SHIFT KEYING)

PSK: modulación por desplazamiento de fase

- Amplitud constante (misma energía), M fases diferentes

$$s_i(t) = \underbrace{\sqrt{e} \sqrt{\frac{2R}{T}}}_{\text{amplitud}} \cdot \cos\left(\omega_c t + \frac{2\pi(i-1)}{M} + \theta_0\right)$$

✓ θ_0 es la fase del primer símbolo

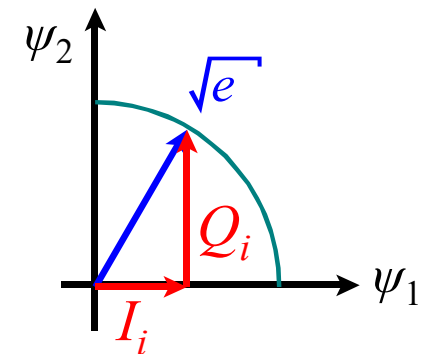
- Interpretación según fase-cuadratura:

$$s_i(t) = \underbrace{\sqrt{e} \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{M} + \theta_0\right)}_{I_i} \psi_1(t) + \underbrace{\sqrt{e} \sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{M} + \theta_0\right)}_{Q_i} \psi_2(t)$$

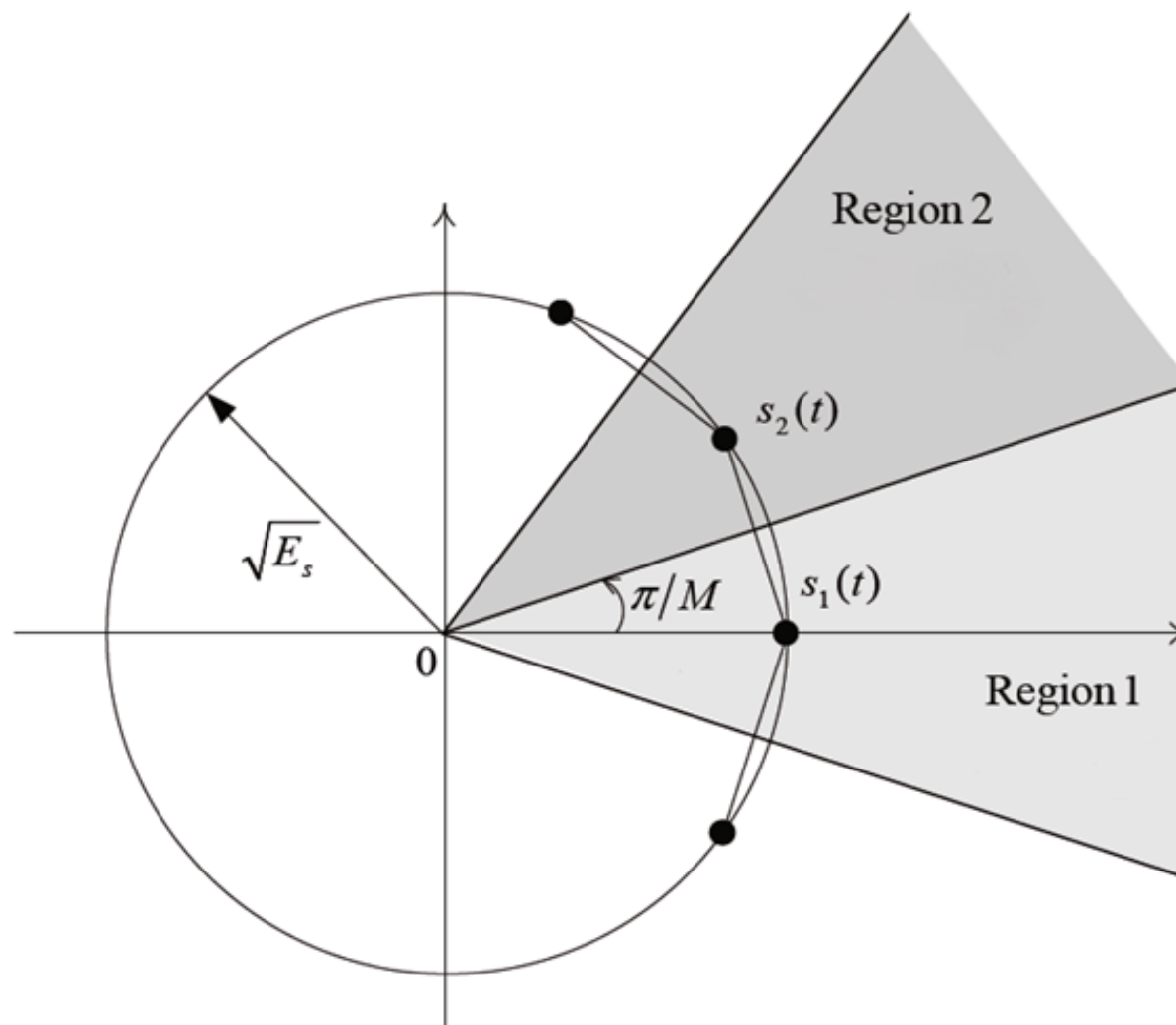
Todos los símbolos tienen la misma energía

PEP = Potencia media

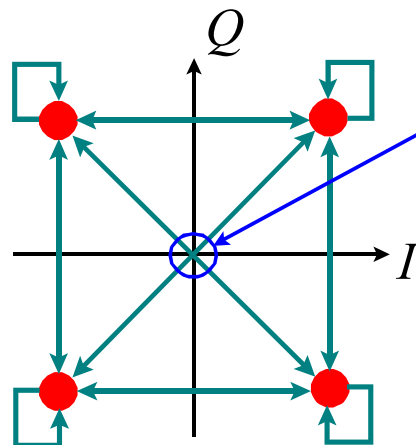
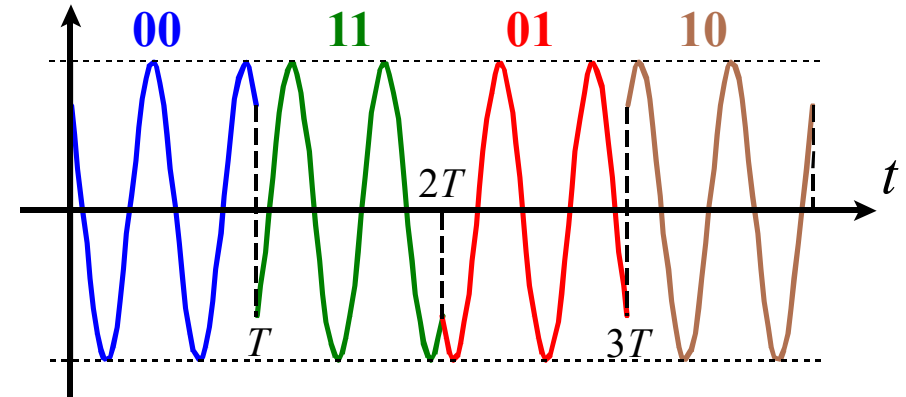
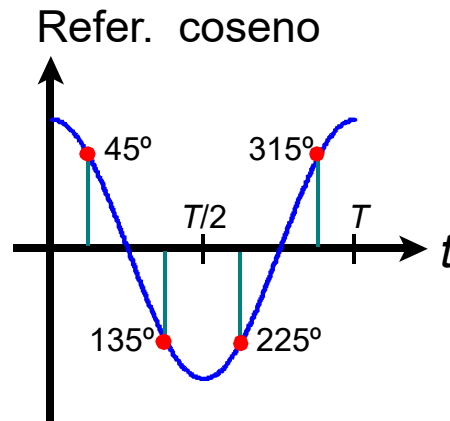
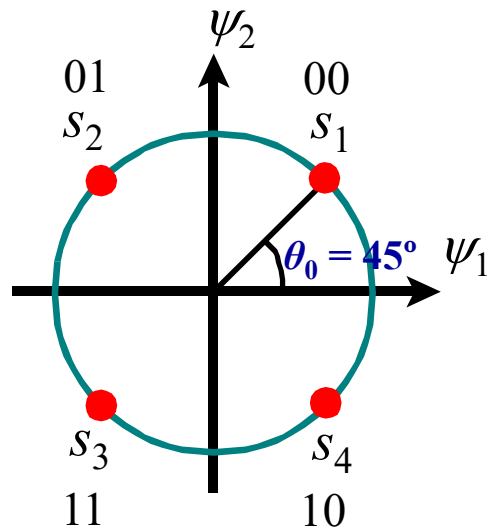
- Modulación interesante para utilizar en canales con distorsión de amplitud



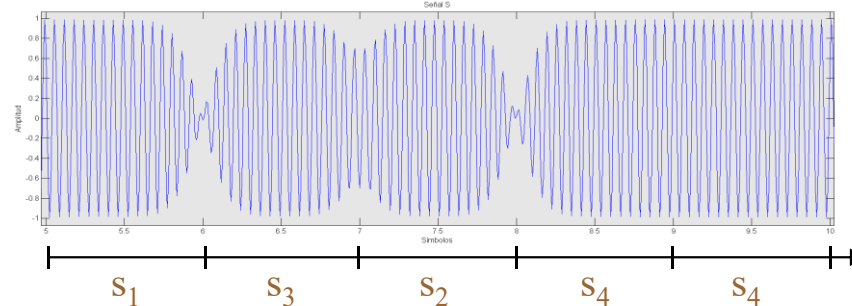
Regiones de decisión



QPSK (Quadrature phase-shift keying)



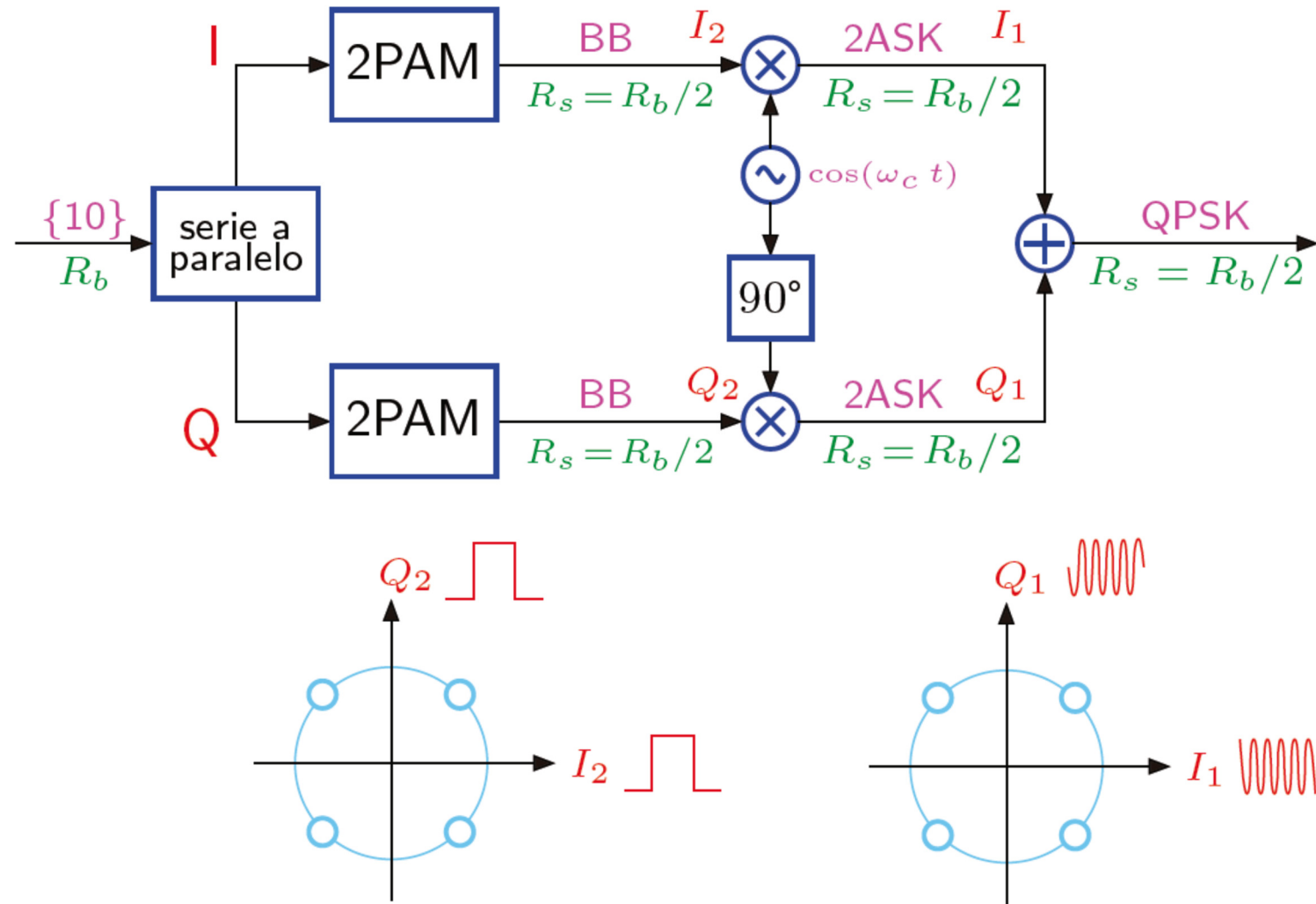
Las transiciones simultáneas en los canales I-Q ocasionan cruces por cero en la envolvente \rightarrow Problemas de no linealidades en los amplificadores



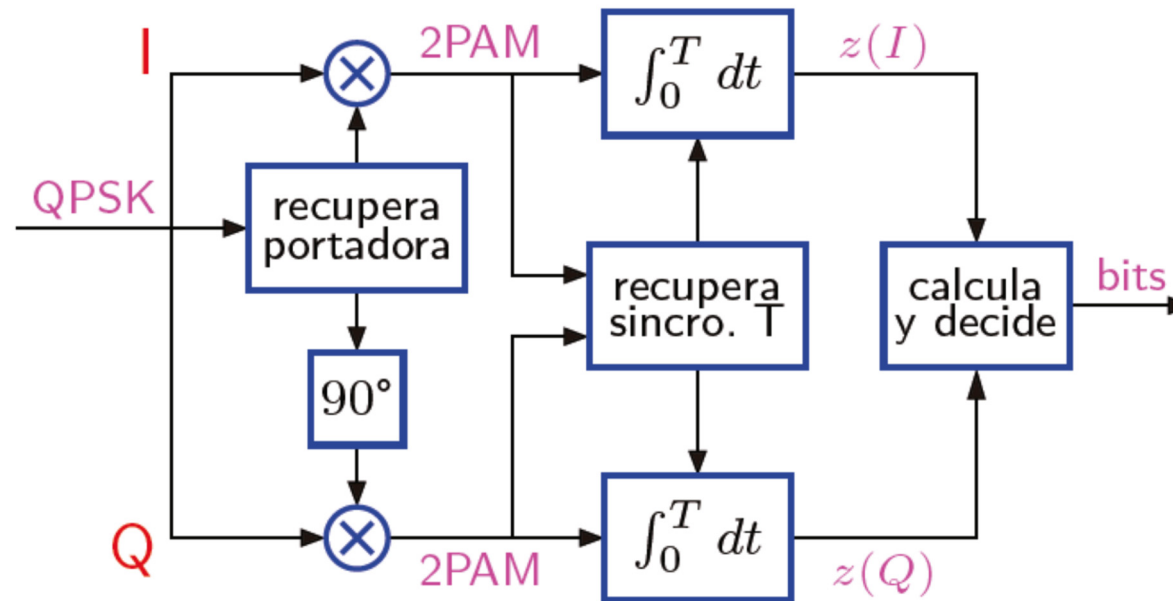
Nota. El nombre más habitual de la constelación que se estudia en esta página es QPSK, pero también podría llamarse 4-PSK o 4-QAM (dentro de la familia de modulaciones de amplitud en cuadratura)

Modulador QPSK

QPSK puede verse como la combinación de 2ASK en fase y 2ASK en cuadratura



Demodulador QPSK

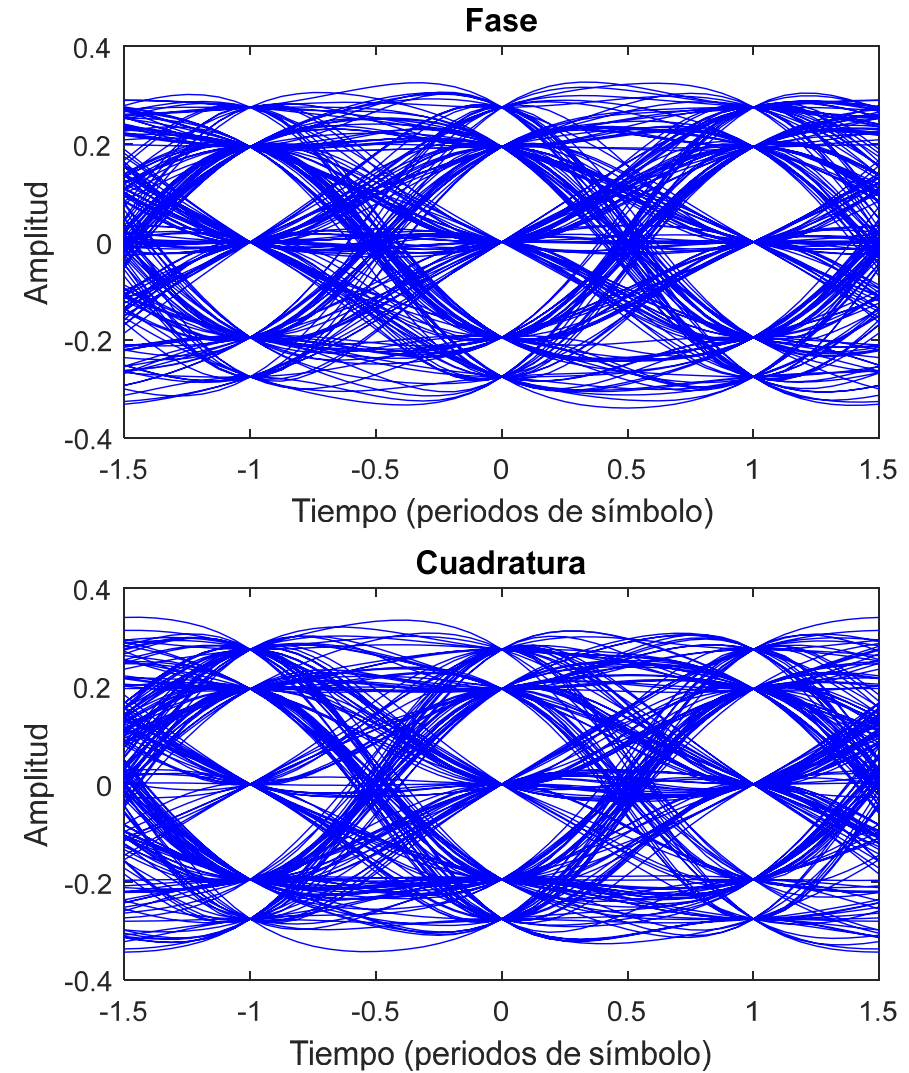
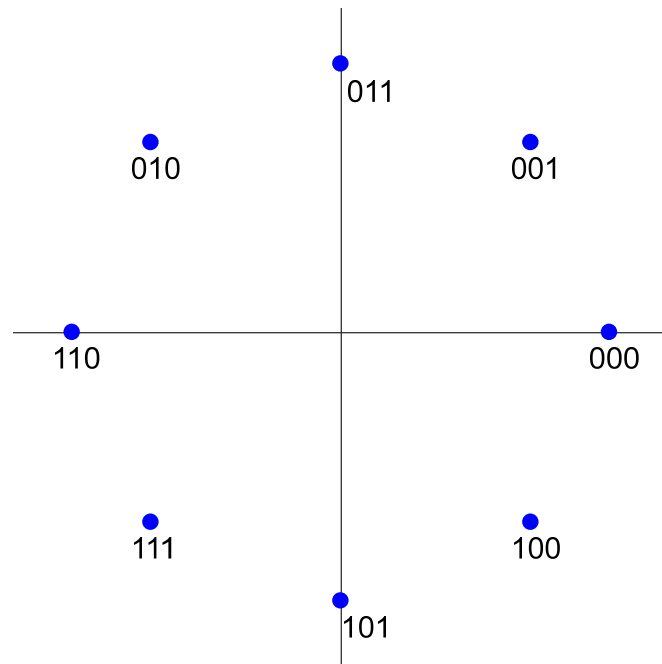


○ Demodulador QPSK

- ✓ Se recupera la portadora; resto por separado I y Q
- ✓ Detección coherente
- ✓ El integrador obtiene la muestra (en I y en Q)

8-PSK con fase inicial 0°

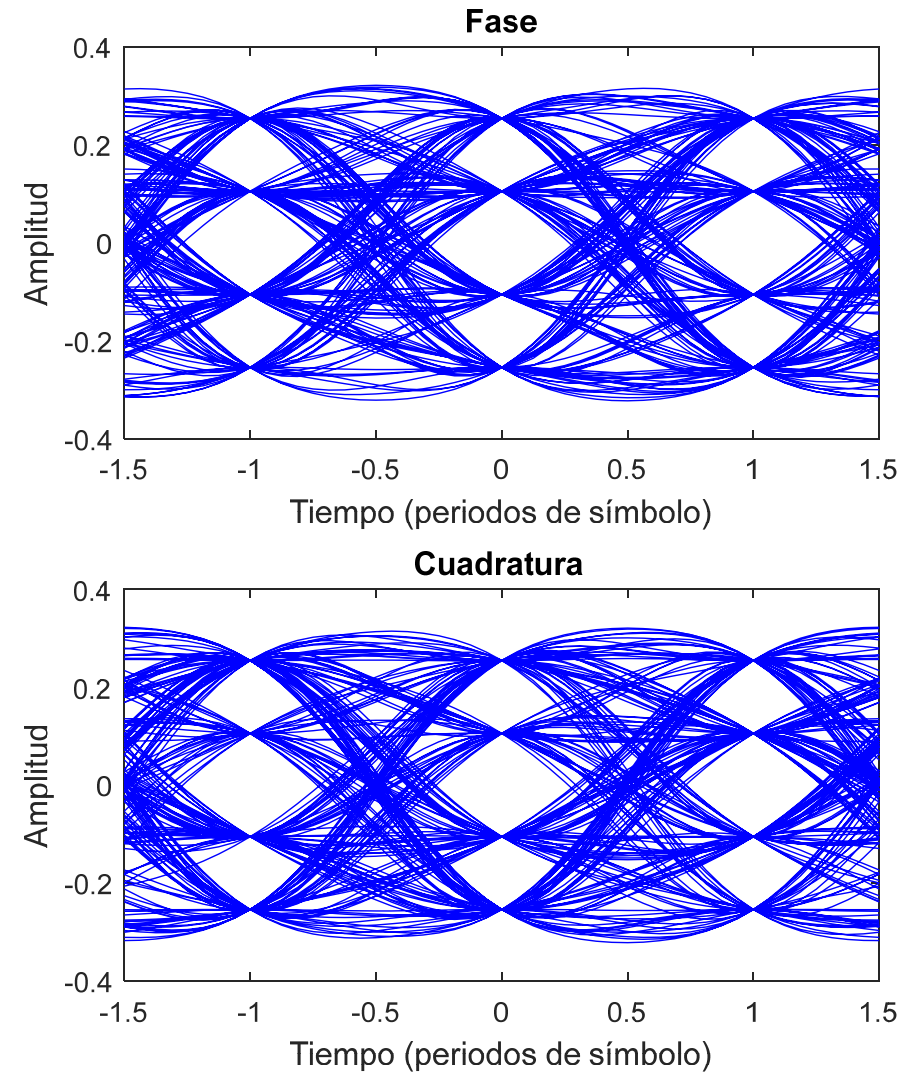
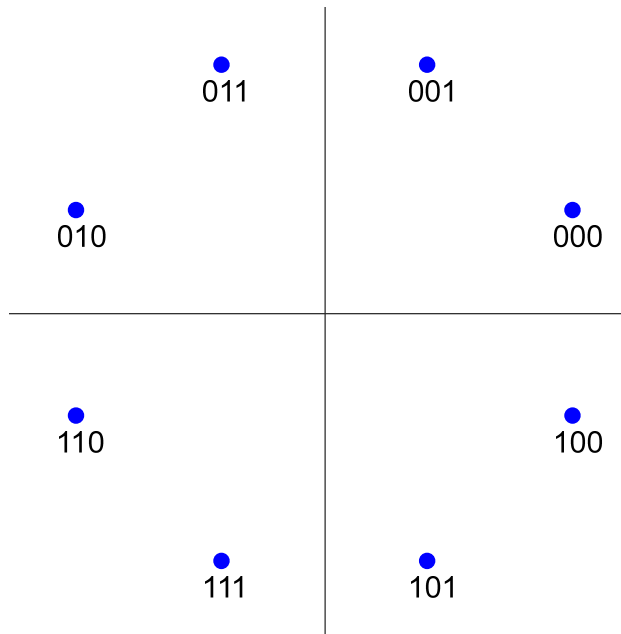
Constelación y diagrama de ojos



Se han utilizado pulsos en coseno alzado, $\alpha = 0,7$

8-PSK con fase inicial $\pi/2$

Constelación y diagrama de ojos



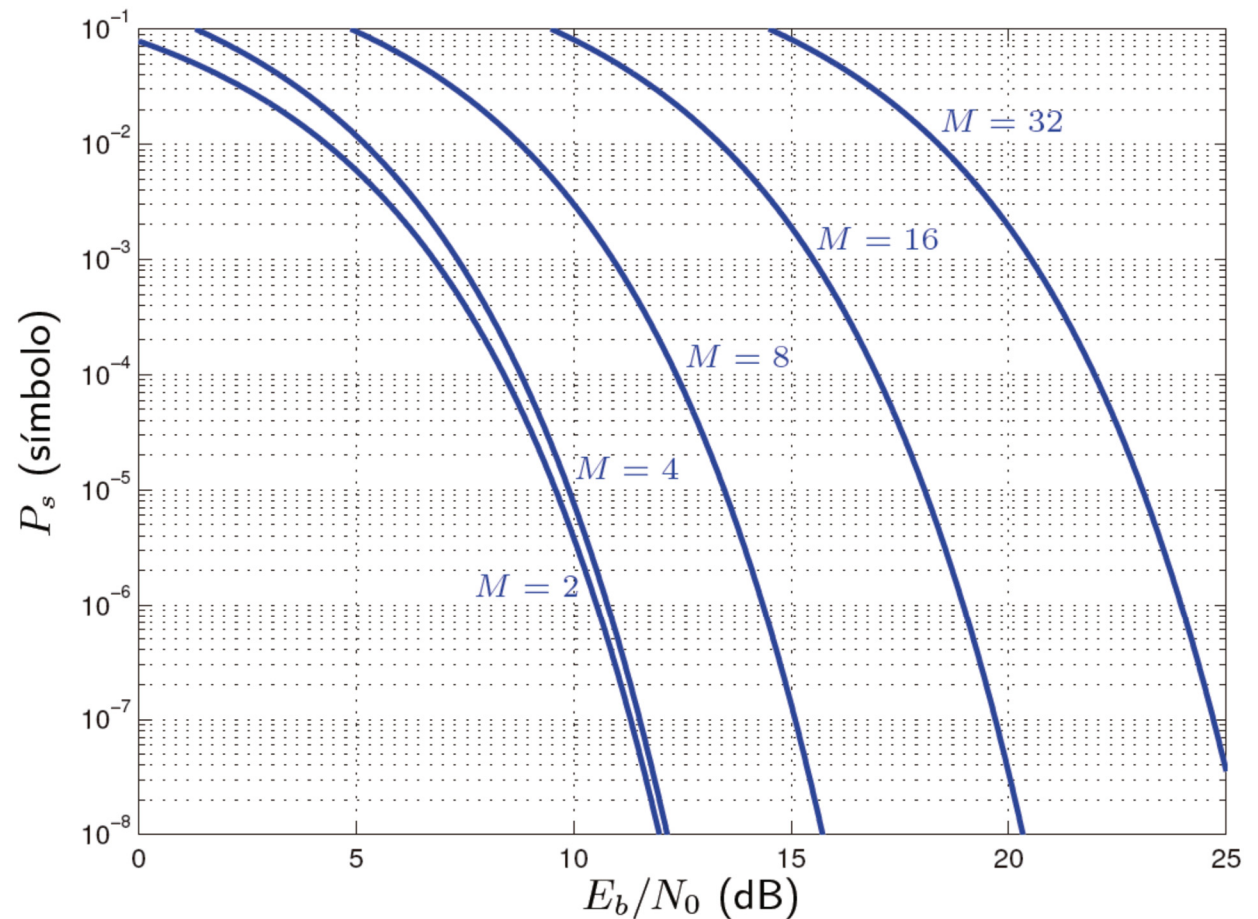
Se han utilizado pulsos en coseno alzado, $\alpha = 0,7$

Calidad en PSK

Error acotado: $\operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{e_s}{n_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] \geq P_s \geq \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{e_s}{n_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right]$

Si $\left(\frac{e_b}{n_0}\right) \gg 1$ y $M \geq 4$:

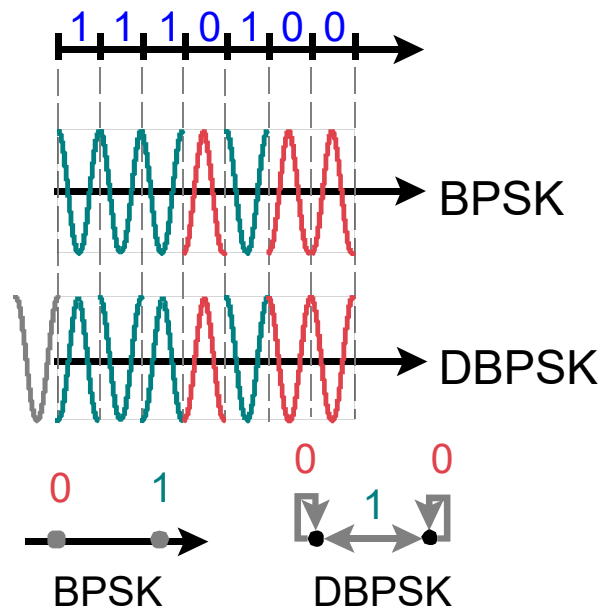
$$P_s \approx \operatorname{erfc}\left[\sqrt{\frac{e_s}{n_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right]$$



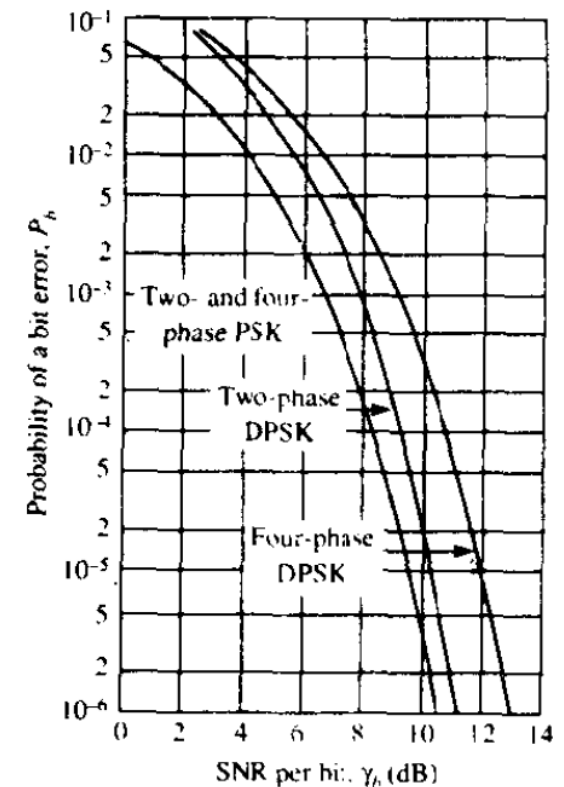
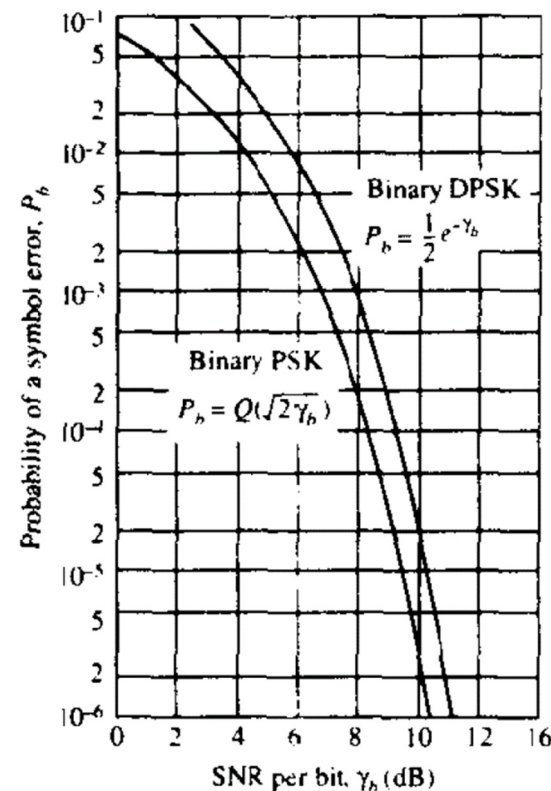
DPSK (PSK diferencial)

La información no va en la fase absoluta sino en los cambios de fase

Permite demodulación no coherente: no es necesario recuperar la portadora



DPSK con detección no coherente requiere entre 1 y 3 dB más de potencia



Modulaciones lineales

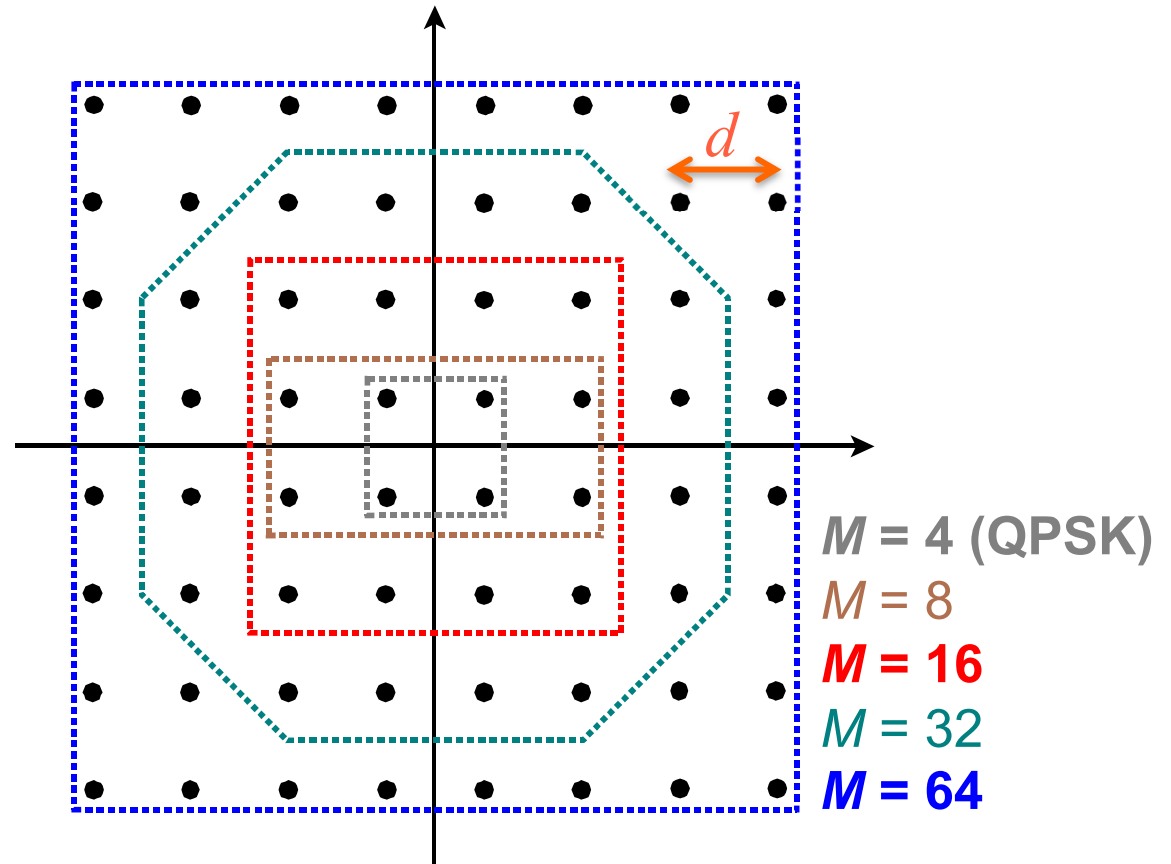
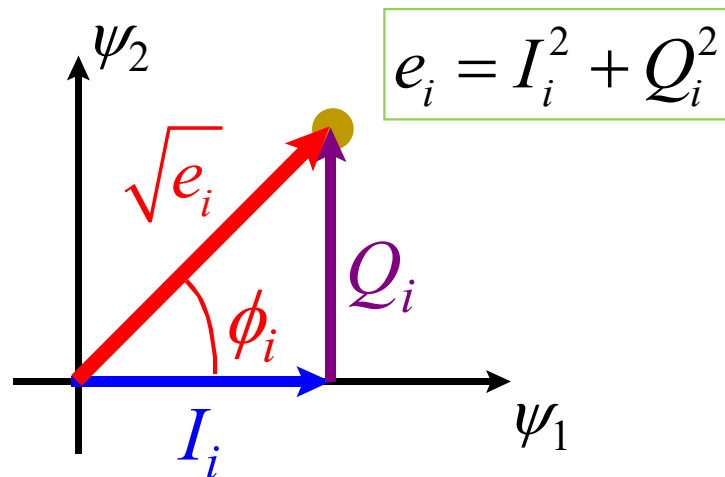
QAM (QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION)

QAM: modulación de amplitud en cuadratura

○ Puede interpretarse como:

- ✓ 2 señales **N-PAM** independientes modulando una portadora en fase y otra en cuadratura
- ✓ Una modulación **ASK** tanto en fase como en cuadratura

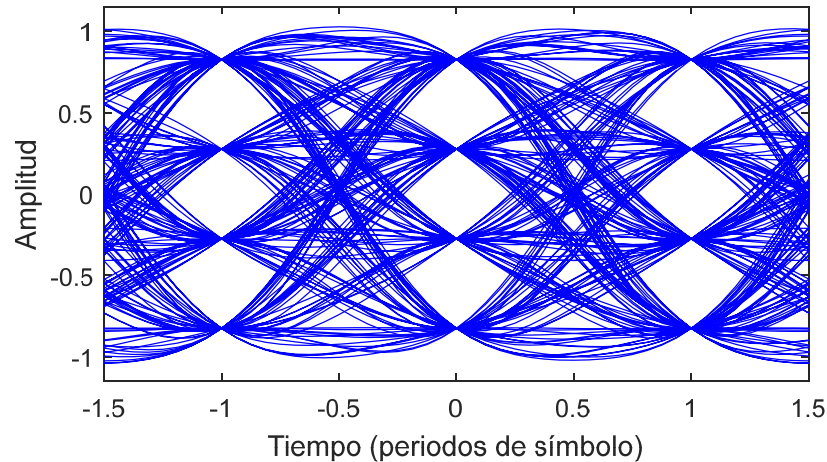
$$s_i(t) = I_i \cdot \psi_1(t) + Q_i \cdot \psi_2(t)$$



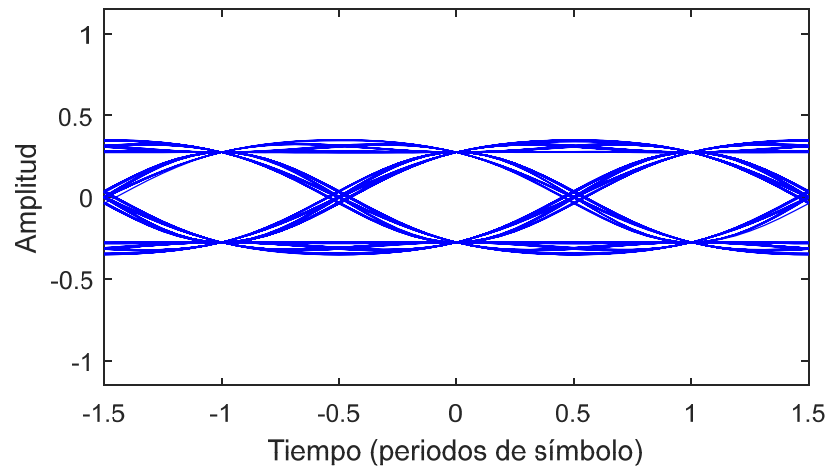
Diagramas de ojo. 8-QAM y 16-QAM

8-QAM

Fase

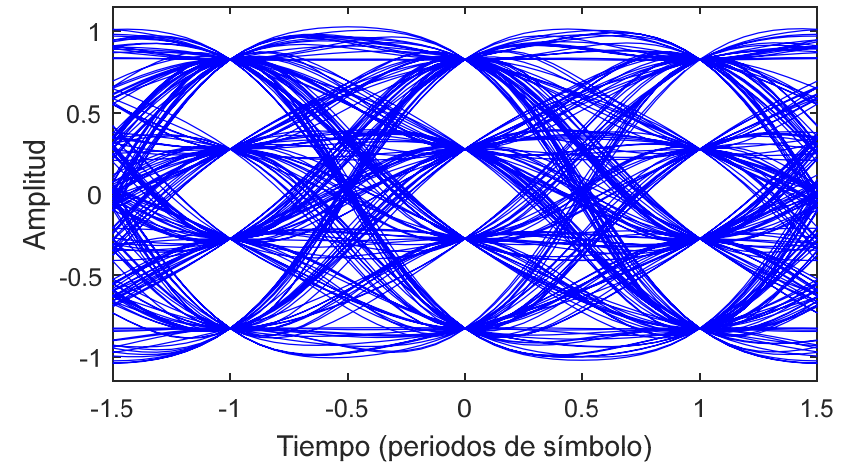


Cuadratura

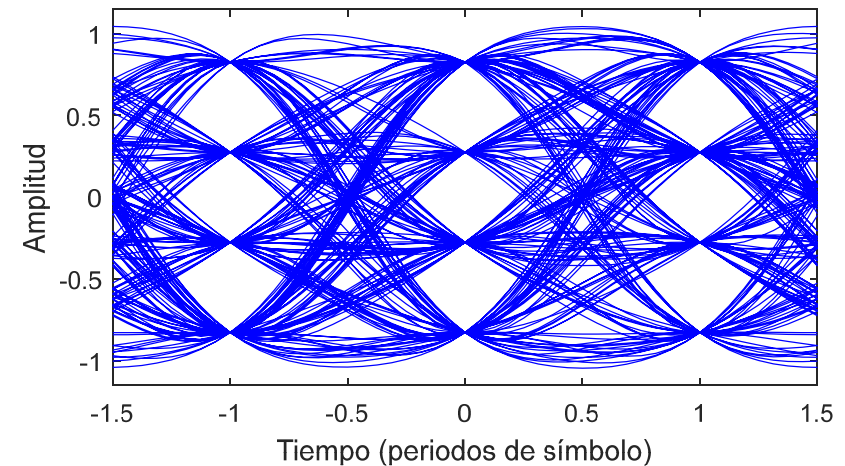


16-QAM

Fase



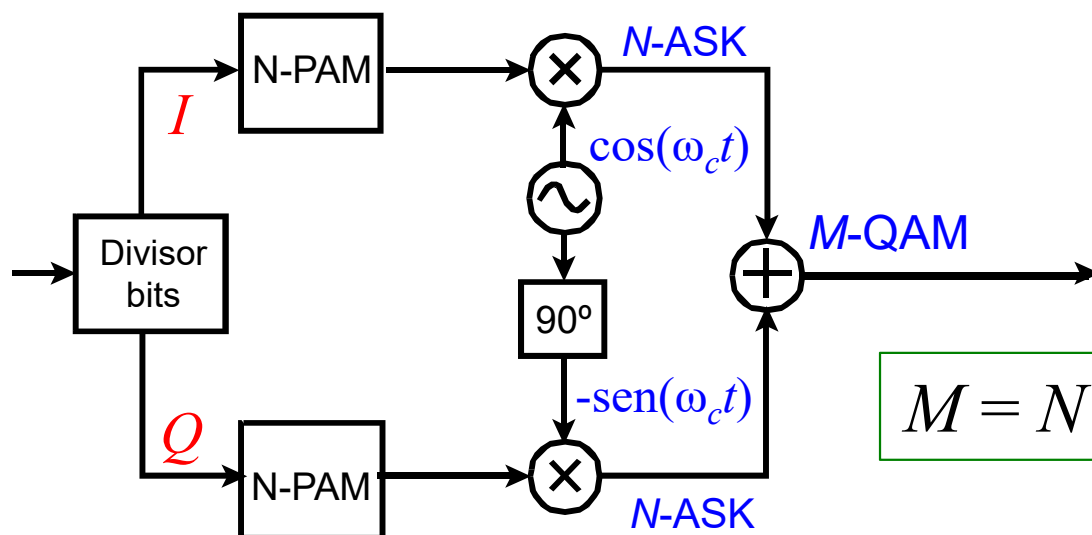
Cuadratura



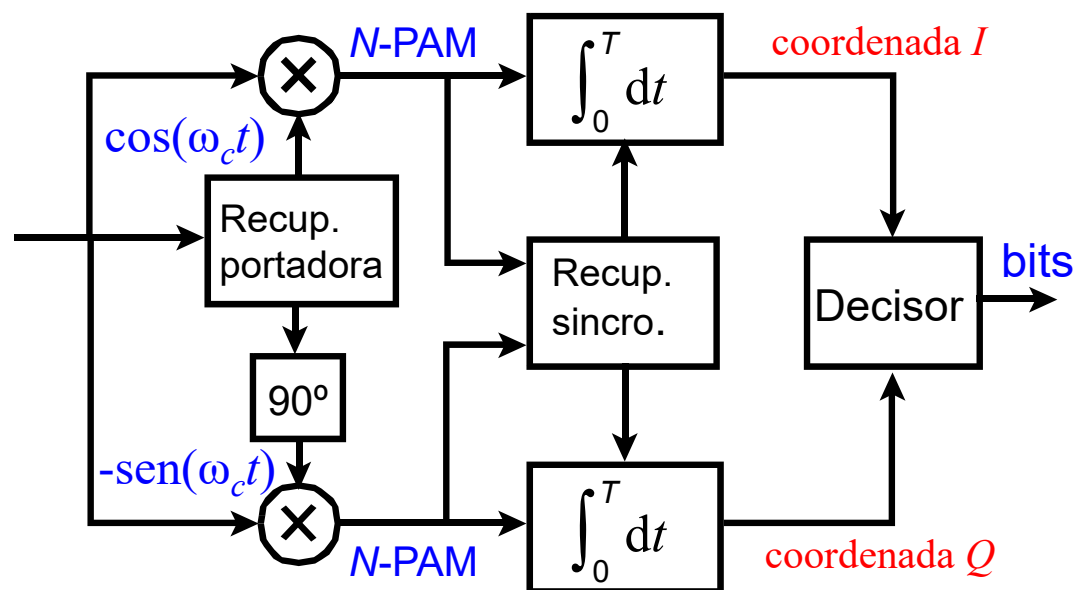
Se han utilizado pulsos en coseno alzado, $\alpha = 0,7$



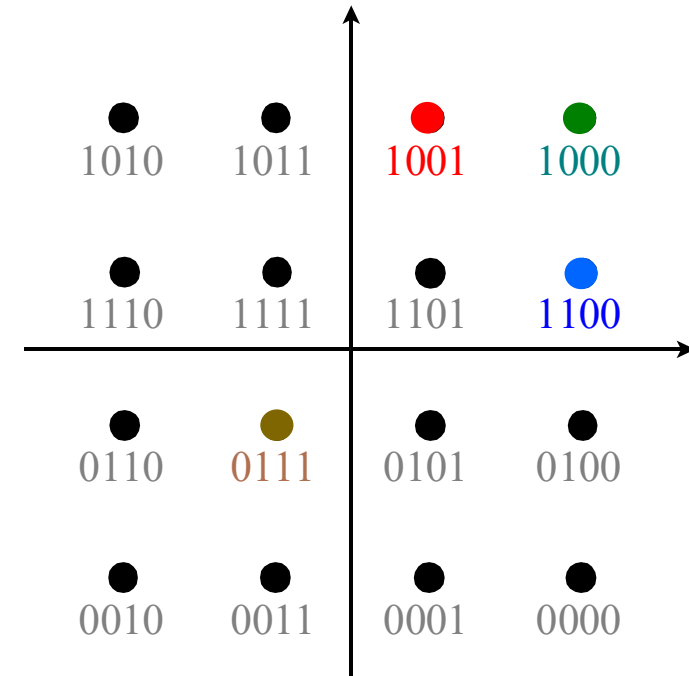
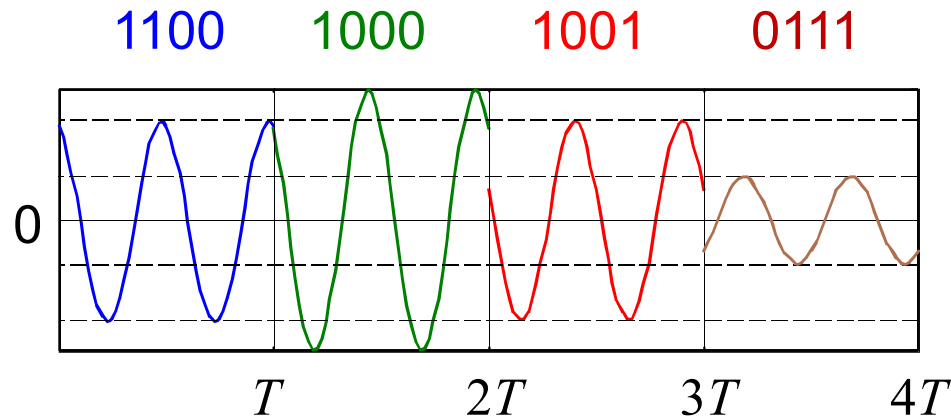
QAM. Modulación y demodulación



* Diagramas de bloques válidos para $M = 4, 16, 64$



16-QAM



Amplitudes [V]

$$A_{1000} = 3 \cdot A_{0111}$$

$$A_{1000} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot A_{1100}$$

$$A_{1100} = \sqrt{5} \cdot A_{0111}$$

Energías [J]

$$e_{1000} = 9 \cdot e_{0111}$$

$$e_{1000} = \frac{9}{5} \cdot e_{1100}$$

$$e_{1100} = 5 \cdot e_{0111}$$

$$\phi_{1100} = \arctan(1/3) \approx 18,4^\circ$$

$$\phi_{1000} = \arctan(1/1) = 45^\circ$$

$$\phi_{1001} = \arctan(3/1) \approx 71,6^\circ$$

$$\phi_{0111} = \arctan(-1/-1) = 225^\circ$$



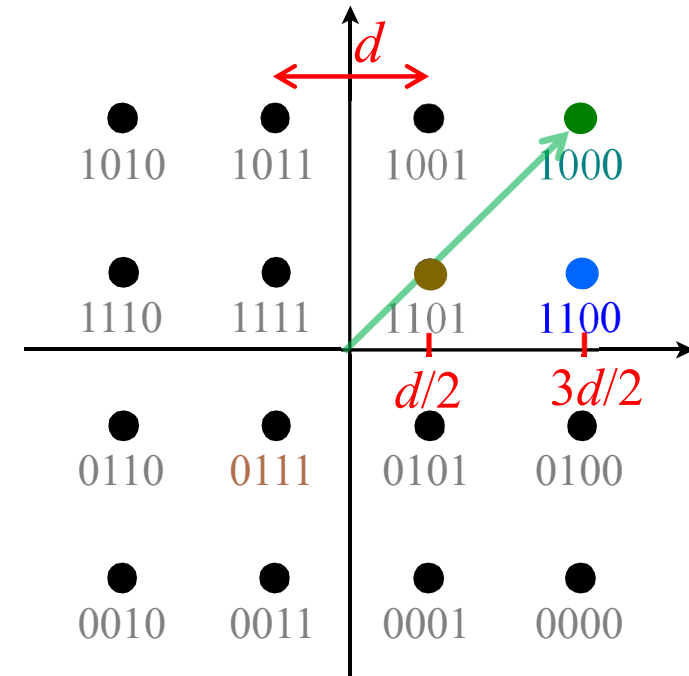
Potencia equivalente de pico. Ejemplo con 16-QAM

$$e_{1000} = (3d/2)^2 + (3d/2)^2 = 9d^2/2$$

$$e_{1100} = E_{1001} = (3d/2)^2 + (d/2)^2 = 5d^2/2$$

$$e_{1101} = (d/2)^2 + (d/2)^2 = d^2/2$$

$$e_s = \frac{e_{1000} + 2e_{1100} + e_{1101}}{4} = \frac{40d^2}{4} = 5d^2/2$$



Potencia media: $\bar{p} = e_s \cdot R_s = (5d^2/2) R_s$

Potencia equivalente de pico: $PEP = e_{1000} \cdot R_s = (9d^2/2) R_s$

Factor de cresta (*peak - to - average power ratio*): $\frac{PEP}{\bar{p}} = 1,8$



QAM. Calidad

8-QAM, 32-QAM. Cota de error:

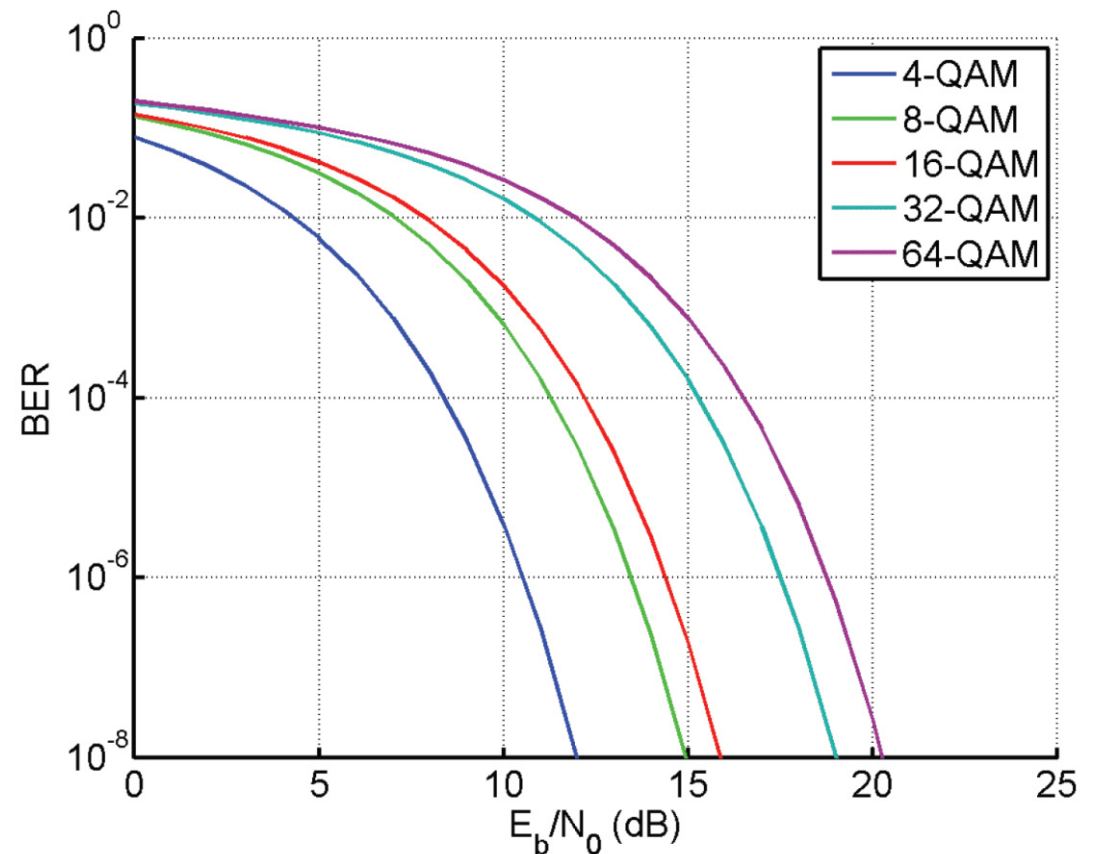
$$P_s < 2 \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3(\log_2 M) e_b}{2(M-1) n_0}} \right)$$

QPSK, 16-QAM, 64-QAM....

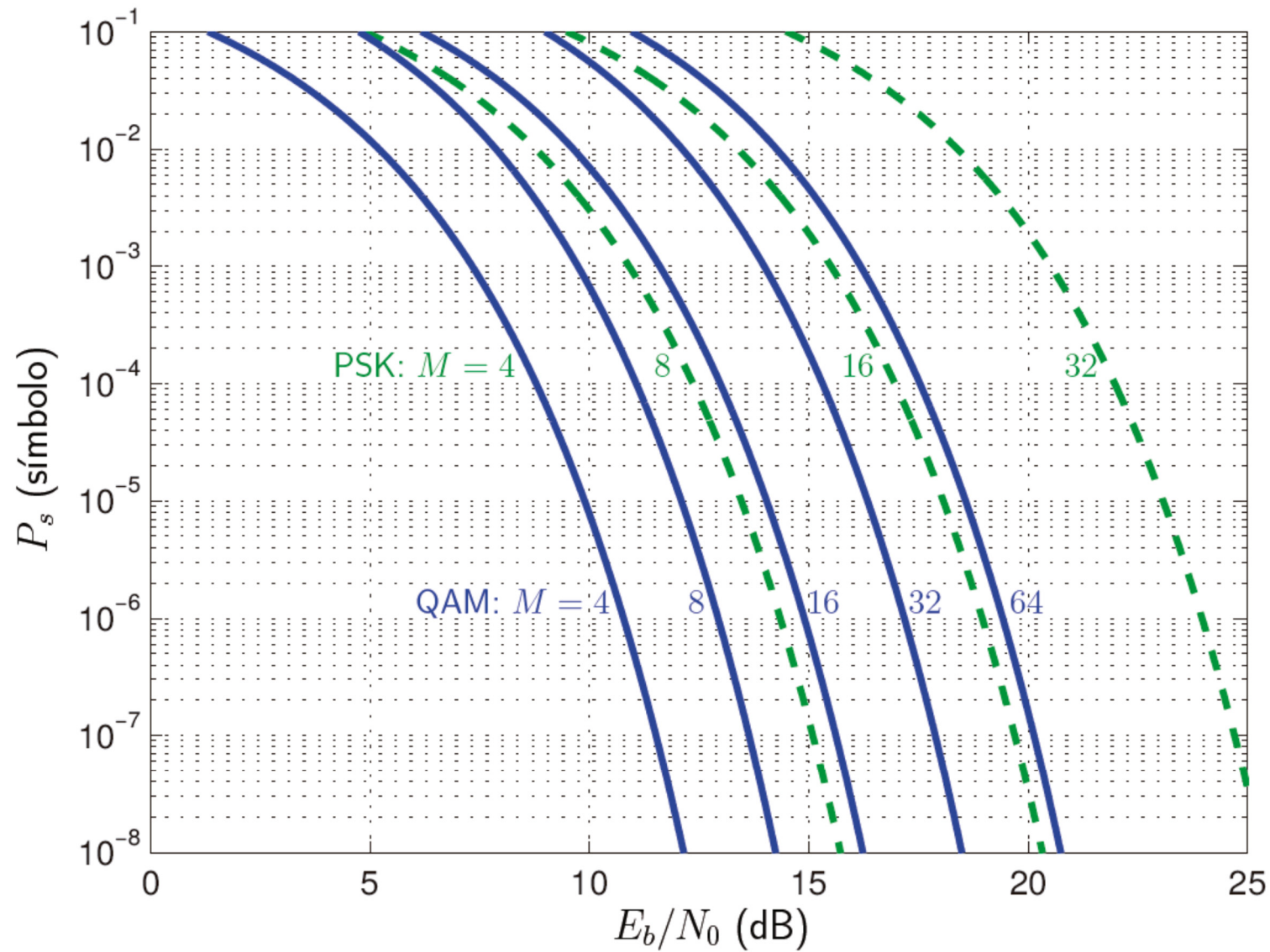
Fórmula cerrada:

$$P_s = 1 - (1 - p)^2$$

$$\text{donde } p = \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3(\log_2 M) e_b}{2(M-1) n_0}} \right)$$



QAM. Calidad



Observaciones sobre el cálculo de calidad en QPSK

QPSK es tanto 4QAM como 4PSK. La calidad puede calcularse con:

- las fórmulas de QAM (más exactas)

$$p = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{e_b}{n_0}} \right)$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{e_b}{n_0}} \right) + \left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{e_b}{n_0}} \right) \right)^2$$

Para los casos más habituales este término es despreciable

- o con las fórmulas de PSK (aproximación)

$$P_s \approx \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{e_s}{n_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right] = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2e_b}{n_0}} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{e_b}{n_0}} \right)$$

$$\text{con lo que resulta}^* \quad BER \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{e_b}{n_0}} \right)$$

* Esta es la expresión analítica para QPSK que aparece con más frecuencia en la literatura

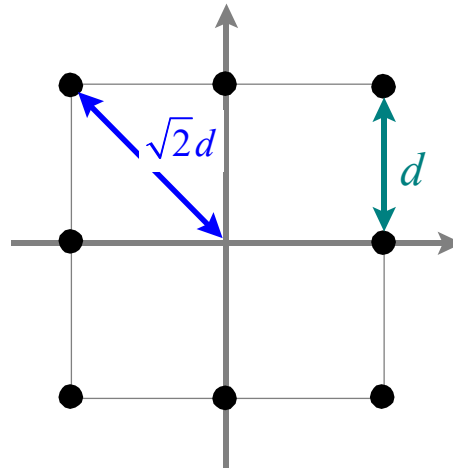
Modulaciones lineales

APK (AMPLITUDE AND PHASE SHIFT KEYING)

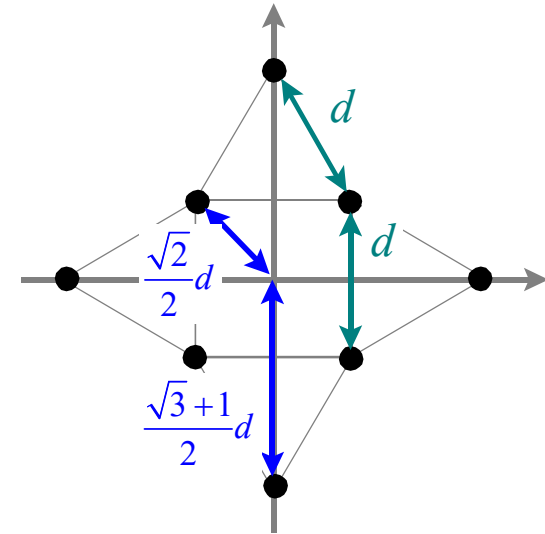
APK: modulación por desplazamiento de amplitud y fase

Ejemplos de 8APK:

Interesa minimizar E_s ,
para d fija



$$e_s = \frac{d^2 + (\sqrt{2}d)^2}{2} = 1,5d^2$$



$$e_s = \frac{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{d + d\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}d^2 \approx 1,183d^2$$

Calidad. Cotas de error:

$$\frac{1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{n_0}}\right) \leq P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{n_0}}\right)$$

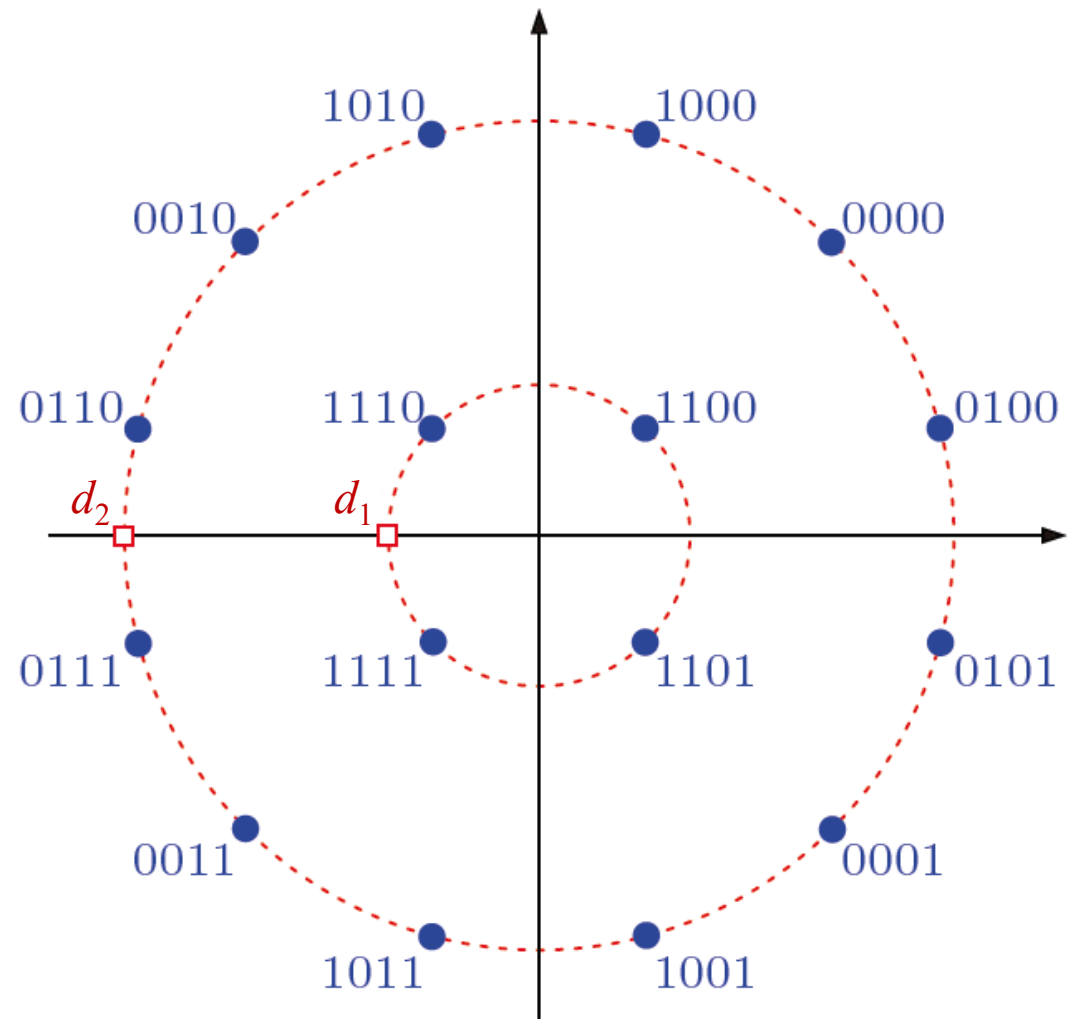


APK. Otro ejemplo

Modulación '16APSK'

Utilizada en DVB-S2

La relación d_2/d_1 es variable



Tema 9. Modulaciones digitales

MODULACIONES DE FRECUENCIA FSK (FREQUENCY SHIFT KEYING)

FSK: modulación por desplazamiento de frecuencia

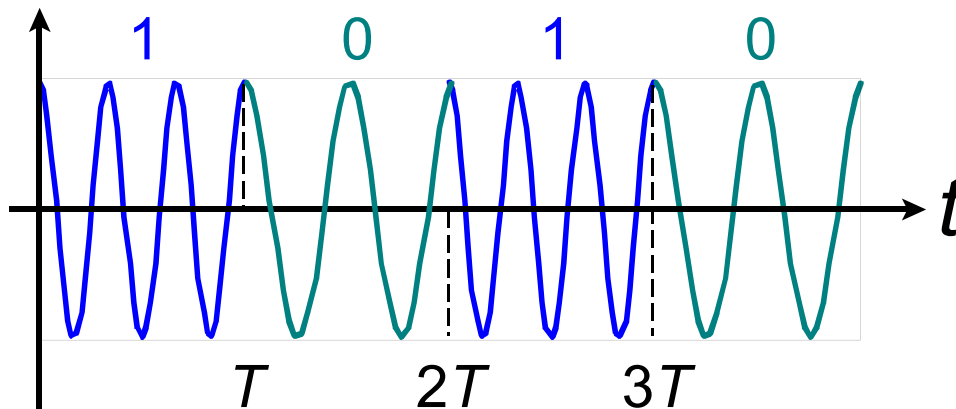
$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_i t), \quad f_i = f_c + \frac{\Delta f}{2} i \quad \begin{cases} i = \pm 1, \pm 3 & M \text{ par} \\ i = 0, \pm 2 & M \text{ impar} \end{cases}$$

Δf : separación entre frecuencias contiguas

Energía constante: $e = \frac{A^2}{2R} T$

$$PEP = \bar{p}$$

Ejemplo: 2-FSK (o BFSK)



No suele emplearse la representación de símbolos en una constelación. Es poco útil en FSK

Ortogonalidad

- Todos los símbolos son ortogonales entre sí:

$$\langle s_i, s_j \rangle = \int_0^T s_i(t) \cdot s_j(t) dt = 0 \quad \begin{cases} \forall i, j = 1, 2, \dots, M \\ i \neq j \end{cases}$$

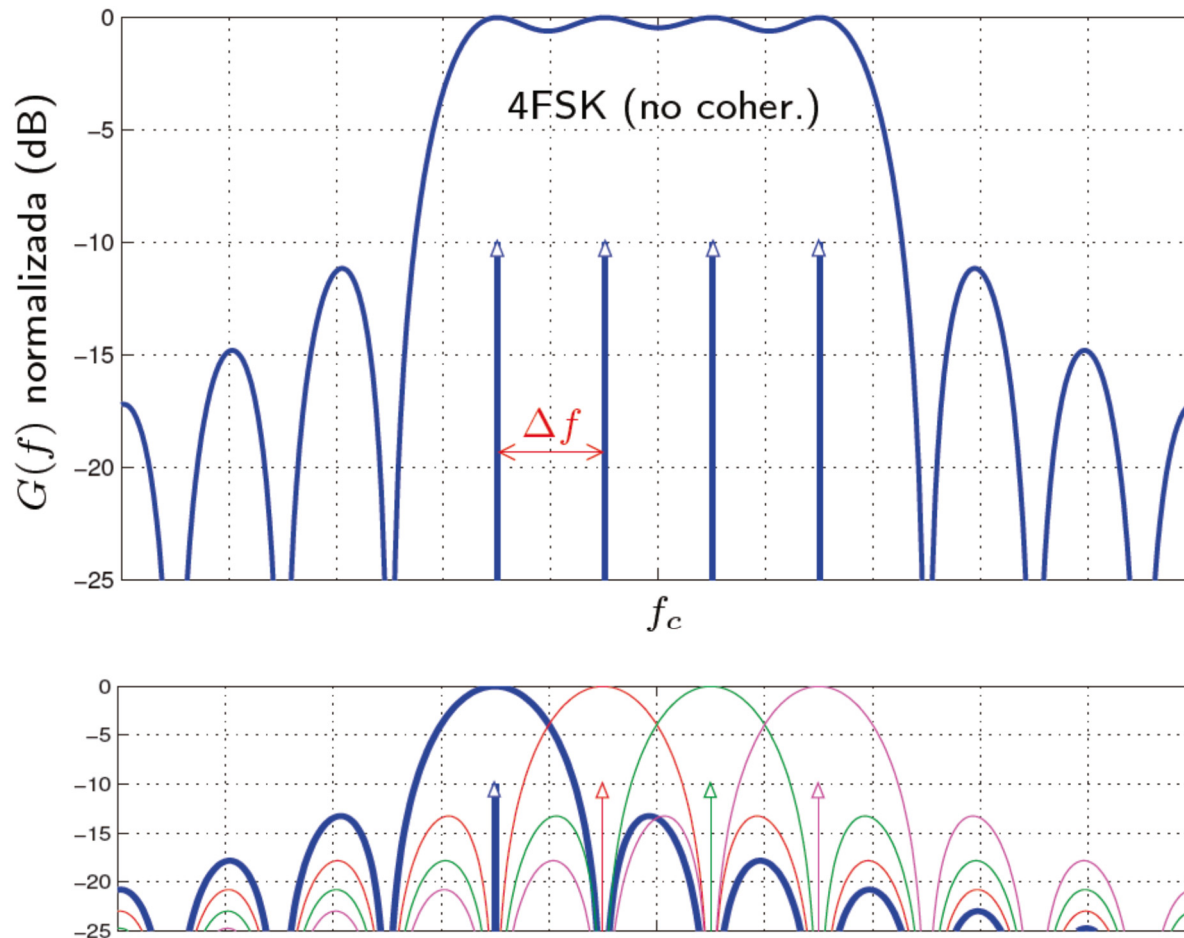
siempre que la separación entre frecuencias sea:

$$\Delta f = \frac{1}{2T}, \frac{2}{2T}, \frac{3}{2T} \quad \text{con detección coherente}$$

$$\Delta f = \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T} \quad \text{con detección no coherente}$$

- Todos los símbolos son contiguos: no puede aplicarse codificación Gray

Ancho de banda



Fórmula para estimar el ancho de banda:

$$B \cong (M-1)\Delta f + R_s(1+\alpha)$$

entre deltas

criterio Nyquist con
coseno alzado

donde:

$$\Delta f = \frac{1}{2T} \text{ con detección coherente}$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} \text{ con detección no coherente}$$

Relación símbolo-bit:

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_s \quad \longrightarrow$$

Ejemplos

$$M = 2; P_b = P_s$$

$$M = 4; P_b = \frac{2}{3} P_s$$

$$M = 8; P_b = \frac{4}{7} P_s$$

Con detección coherente:

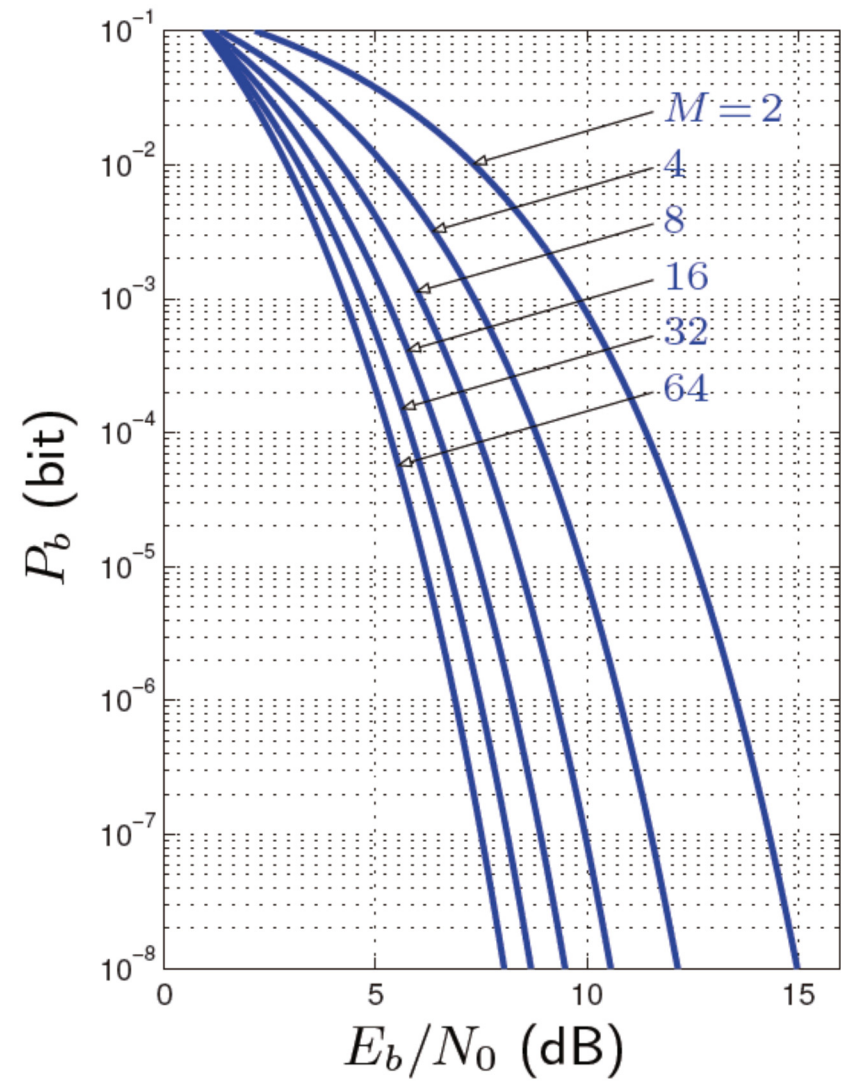
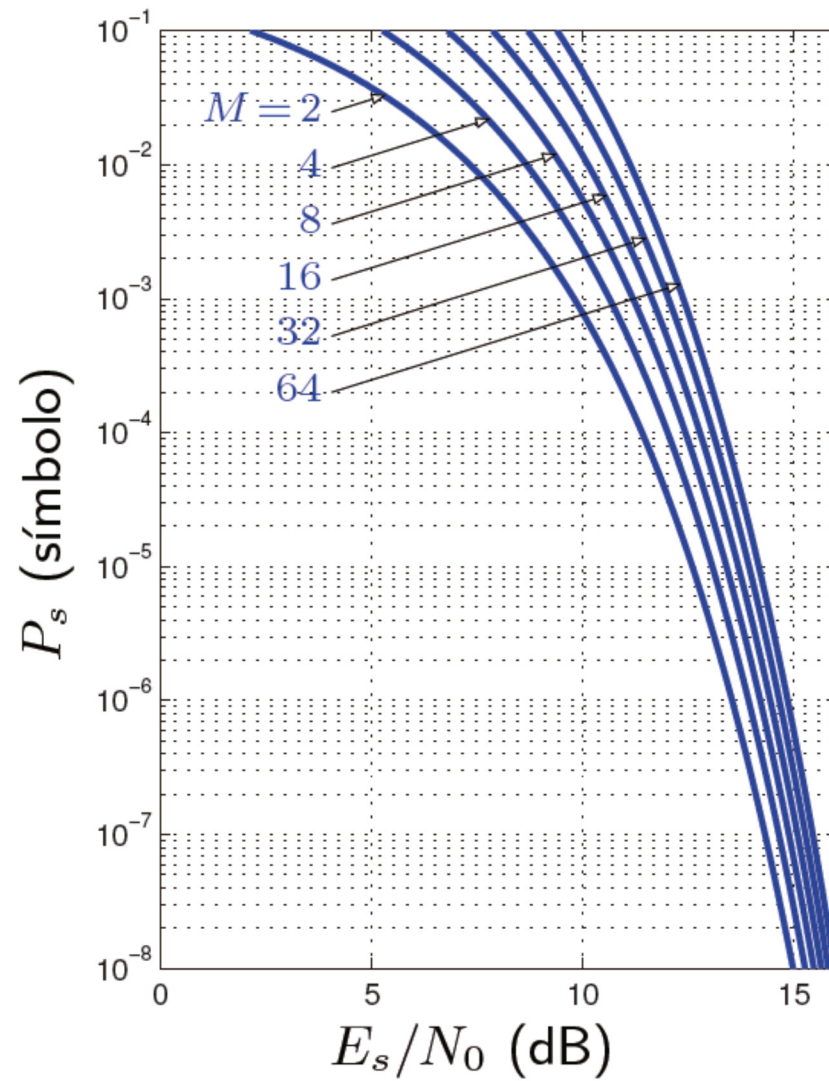
$$P_b \leq \frac{M}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{e_b}{2 n_0} \log_2 M} \right)$$

Al aumentar M :

- Aumenta P_s , pero en menor medida que en modulaciones lineales
- Disminuye P_b . Muy beneficioso, pero el precio a pagar es un aumento muy significativo en el ancho de banda necesario



Calidad



Tema 9. Modulaciones digitales

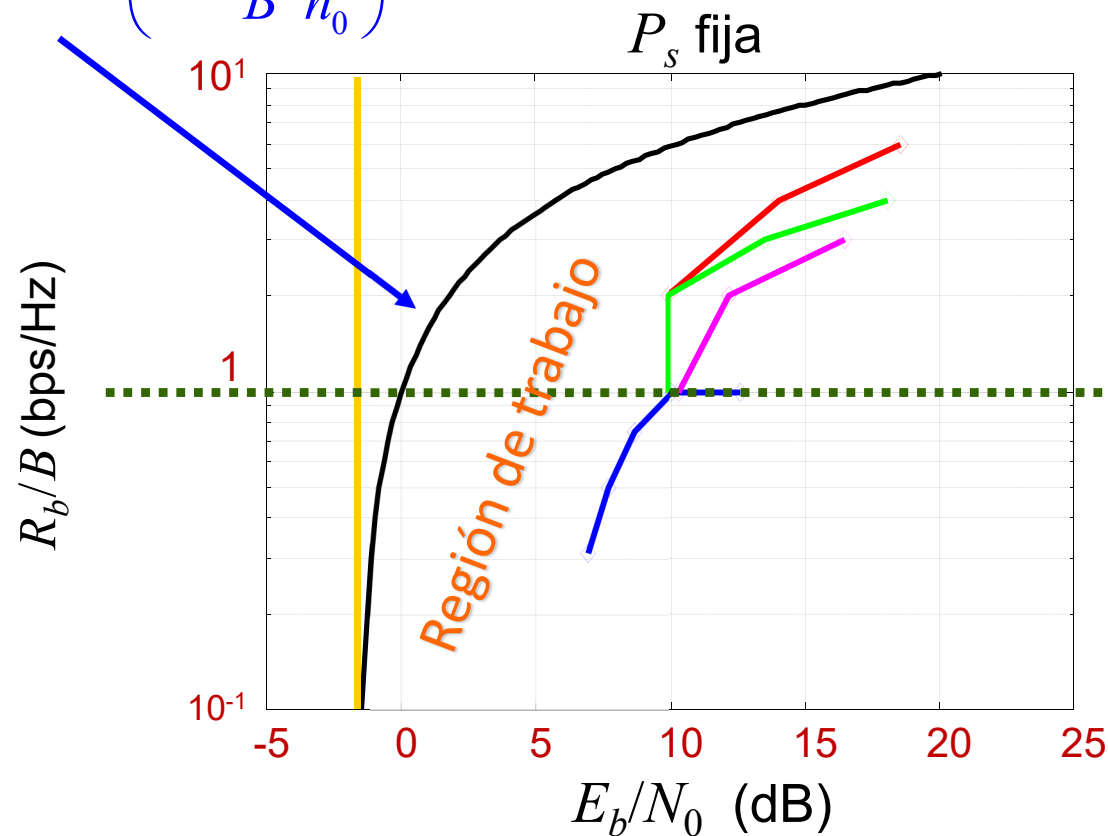
COMPARACIÓN ENTRE MODULACIONES



Capacidad de un canal

Teorema de **Shannon**. Define el límite de capacidad de un canal

$$\text{eficiencia: } \frac{R_b}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{R_b}{B} \frac{e_b}{n_0} \right)$$



Límite por **ancho de banda**

$$R_b/B > 1$$

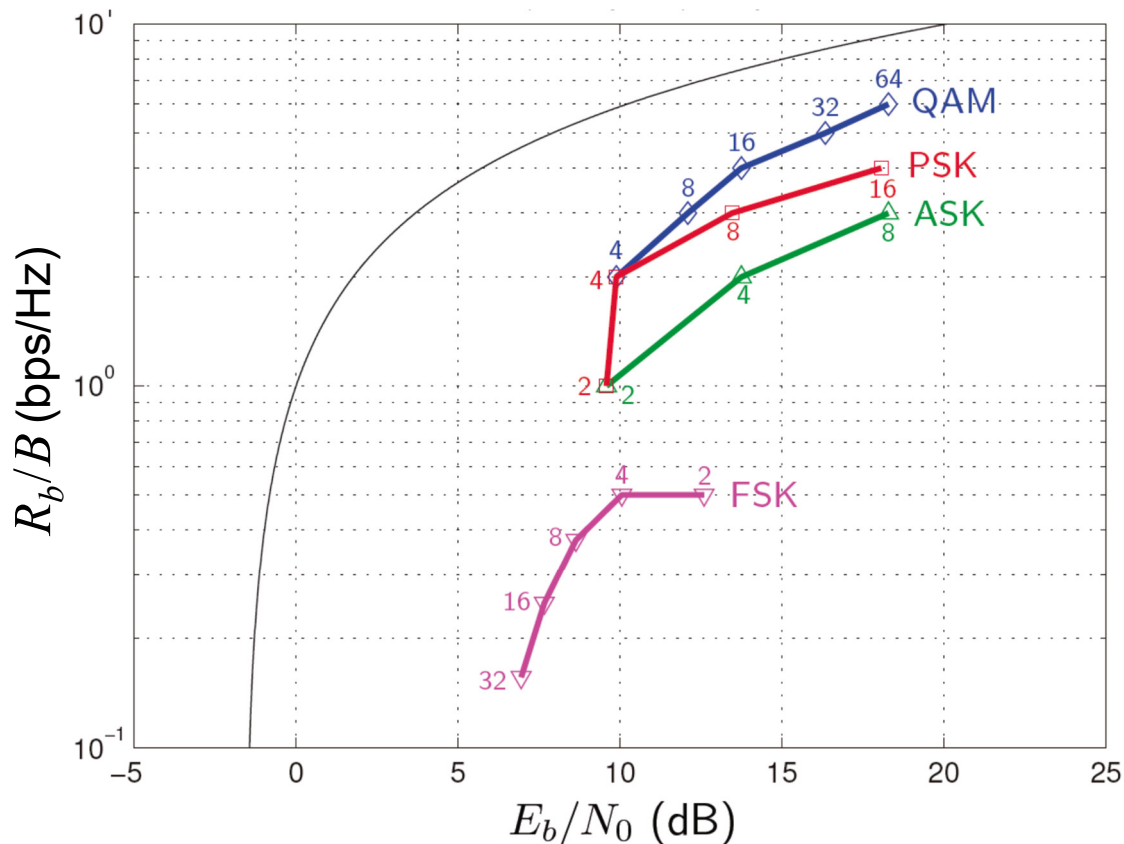
Límite por **potencia**

$$R_b/B < 1$$



Comparación entre modulaciones

Curvas para una $P_s = 10^{-5}$



Zona limitada en banda (lineales):

- ✓ $R_b \uparrow, B \downarrow$
- ✓ Buena eficiencia espectral, pero exige $E_b/N_0 \uparrow$

Zona limitada en potencia (FSK):

- ✓ $R_b \downarrow, B \uparrow \uparrow$
- ✓ Baja E_b/N_0 requerida, pero poco eficiente en uso de B

16QAM-16PSK:

- ✓ Símbolos QAM mejor distribuidos \Rightarrow más calidad

BPSK-QPSK:

- ✓ Calidad parecida
- ✓ QPSK el doble de eficiente (R_b/B)

PSK-DPSK:

- ✓ DPSK: calidad un poco peor, RX más sencillo