TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

UPM. ETSIST. DIAC EF – junio de 2014

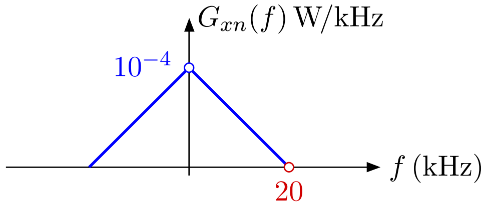
Apellidos: ....

Nombre: .... DNI: ....

PROBLEMA 1 *(3,50 puntos)*: (Nota: no puntuarán los resultados que no se justifiquen adecuadamente.)

Datos de un sistema de comunicaciones:

- Todo el sistema está adaptado a $R = 50\ \Omega$.
- La señal moduladora está normalizada y ocupa $W = 20$ kHz.
- La densidad espectral de potencia de la señal moduladora se observa en la siguiente figura.



- Se modula en FM, con desviación máxima $\Delta f = 100$ kHz, y frecuencia de portadora $f_c = 200$ MHz.
- Potencia equivalente de pico a la salida del transmisor $PEP = 100$ W.
- La atenuación del medio se modela, en función de la distancia recorrida d, mediante:

$$A_t(\text{dB}) = 90 + 20\ \log\left[d(\text{km})\right]$$

- Caracterización de ruido: temperatura de ruido a la entrada del receptor $T_{in} = 2405{,}5$ K; factor de ruido (interno) del receptor $F = 23{,}7$ dB.
- Mejora por preénfasis-deénfasis $M = 20$ dB.
- Se requiere una calidad final de, al menos, 40 dB.

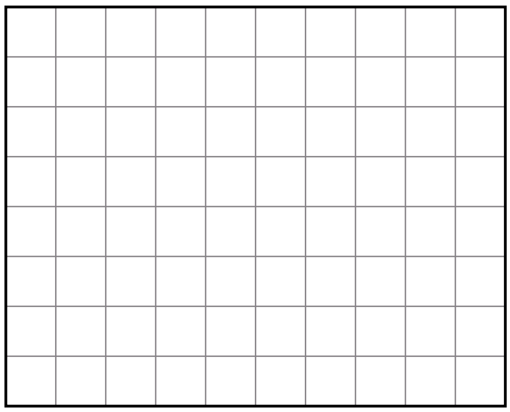
1. Calcule el ancho de banda de la señal modulada. *(0,20 puntos.)*

2. Calcule la densidad espectral unilateral de ruido (total equivalente), N_0(W/Hz), a la entrada del receptor. *(0,40 puntos.)*

3. Calcule la potencia de la señal moduladora, en vatios. Calcule el valor cuadrático medio de la señal moduladora. *(0,50 puntos.)*

4. Calcule la potencia mínima que debe llegar al receptor, P_R(dBm). Calcule la atenuación máxima que se puede permitir, A_t(dB). Calcule la distancia máxima a la que es posible transmitir, d(km). Explique claramente cuál es el factor que limita el resultado. Comente qué ocurre con la calidad. *(1,6 puntos.)*

5. Se sustituye el receptor por un analizador de espectros. Configuración y datos: factor de ruido del analizador $F = 23{,}7$ dB (idéntico al del receptor); frecuencia central 200 MHz; span total de 1 MHz; nivel de referencia -90 dBm; eje vertical con 5 dB/; ancho de banda de resolución 1 kHz; atenuación de entrada 0 dB. Dibuje, en la cuadrícula de la siguiente figura, la medida que realizará el analizador. Considere que la señal FM tiene una densidad espectral de potencia aproximadamente nula fuera de su ancho de banda, y aproximadamente constante en todo su ancho de banda (es decir: toda la potencia de la señal FM se distribuye de manera aproximadamente uniforme a lo largo de todo el ancho de banda de Carson). (Nota: si no ha resuelto el apartado anterior tome $A_t = 120$ dB.) *(0,80 puntos.)*



(Puede usar esta carilla para completar la resolución de uno o varios apartados.)

RESOLUCIÓN PROBLEMA 1.

1. Se calcula usando la fórmula de Carson:

$$B_c = 2\,(\Delta f + W)$$

$$B_c = 2\,(100 + 20)(\text{k}) = 240 \text{ kHz}$$

2. Como a la entrada no tenemos T_0 trabajamos con temperaturas:

$$f = 10^{2{,}37} = 234{,}42288 \text{ v.p.}$$

$$T_e = T_0\,(f - 1) = 300\,(234{,}42288 - 1) = 70026{,}864 \text{ K}$$

$$N_0 = k\,(T_{in} + T_e) = 1{,}3806 \cdot 10^{-23}\,(2405{,}5 + 70026{,}864) \approx 10^{-18} \text{ W/Hz}$$

3. Potencia de la señal moduladora:

$$p_{xn} = \int G_{xn}(f)\,df = 10^{-4} \cdot 20 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Valor cuadrático medio (es una señal normalizada):

$$p_{xn} = \frac{\langle x_n^2 \rangle}{R}$$

$$\langle x_n^2 \rangle = 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}1$$

4. En principio, la limitación viene impuesta por la calidad requerida. Imponemos los 40 dB:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M$$

$$10000 = 3 \cdot 5^2 \cdot \langle 0{,}1 \rangle \cdot z \cdot 100$$

$$z = 13.\widehat{3} \text{ v.p.}$$

Calculamos el umbral:

$$z_u = 40\,(D + 1) = 240 \text{ v.p.}$$

Como el umbral es mayor que la z, tenemos que imponer el valor umbral, que es la nueva limitación (para evitar que el ruido capture a la señal):

$$z = \frac{p_R}{N_0\,W}$$

$$z = z_u = 240 = \frac{p_R}{10^{-18} \cdot 20000}$$

$$p_R = 4{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ W} \quad \rightarrow \quad -83{,}2 \text{ dBm}$$

$$a_t = \frac{p_T}{p_R} = \frac{100}{4{,}8 \cdot 10^{-12}} = 2{,}08\widehat{3} \cdot 10^{-13} \text{ v.p.}$$

$$A_t \approx 133{,}2 \text{ dB}$$

$$133{,}2 = 90 + 20 \log(d)$$

$$d \approx 144{,}5 \text{ km}$$

Y la calidad que tenemos es superior al límite requerido:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot 5^2 \cdot \langle 0{,}1 \rangle \cdot 240 \cdot 100 = 180000 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 52{,}6 \text{ dB}$$

5. Tenemos la misma densidad de ruido que en el caso del receptor. Nivel de ruido en la pantalla:

$$N_0 = 10^{-18}\ \text{W/Hz} \quad \rightarrow \quad -150\ \text{dBm/Hz}$$

$$N = N_0 + 10\ \log(RBW) = -150 + 10\ \log(1000) = -120\ \text{dBm}$$

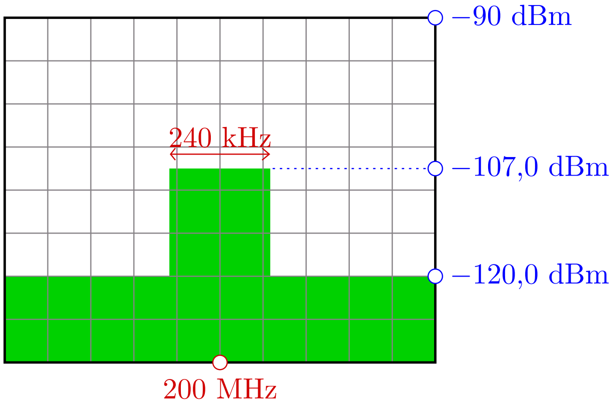
Para la señal, distribuimos la p_R en el ancho de banda de carson:

$$S_0 = \frac{p_R}{B_c} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-12}}{240000} = 2 \cdot 10^{-17}\ \text{W/Hz}$$

$$S_0 \approx -137{,}0\ \text{dBm/Hz}$$

$$S = S_0 + 10\ \log(RBW)\ \ (\text{dentro de } B_c)$$

$$S = -137{,}0 + 30 = -107{,}0\ \text{dBm}$$



Para la resolución dual con $A_t = 120$ dB:

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = \frac{100}{10^{12}} = 10^{-10}\ \text{W}$$

$$S_0 = \frac{10^{-10}}{240000} = 4{,}1\widehat{6} \cdot 10^{-16}\ \text{W/Hz}$$

$$S_0 \approx -123{,}8\ \text{dBm/Hz}$$

$$S = -123{,}8 + 10\ \log(RBW)\ \ (\text{dentro de } B_c)$$

$$S = -93{,}8\ \text{dBm}$$

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

UPM. ETSIST. DIAC EF – junio de 2014

Apellidos: ....

Nombre: .... DNI: ....

PROBLEMA 2 (*3,50 puntos*). Se transmite una información digital de régimen binario $R_b = 16$ Mbps utilizando una modulación 4-ASK con código de Gray. La potencia equivalente de pico (PEP) de la transmisión es 72 W y la frecuencia portadora $f_c = 1$ GHz. La localización de los símbolos en la constelación puede visualizarse en la Figura 1.

Al receptor llega una potencia media de -74 dBm. Su temperatura total equivalente a la entrada es 5983 K.

Considere $R = 1\ \Omega$.

Nota 1. Se adjuntan ecuaciones de calidad para ASK y tabla con los valores de la función *erfc*.

Nota 2. Los apartados 3 a 5 no requieren datos obtenidos en 1 y 2. Asimismo, el apartado 6 propone una modificación del sistema; puede resolverse de manera independiente.

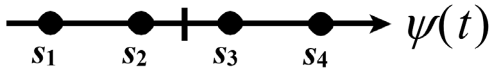


Figura 1. Constelación de la modulación 4-ASK

1. Calcular la energía de los símbolos transmitidos s_3 y s_4. Calcular la potencia media transmitida (en dBm). (0,80 *puntos*)

2. Determinar la atenuación (en dB) introducida por el medio de transmisión. (0,15 *puntos*)

3. En ausencia de ruido determinar las coordenadas en la base ortonormal de los 4 símbolos recibidos. Escribir la expresión matemática de la señal correspondiente al símbolo s_2 en recepción, en la forma $A \cdot \cos\left(2\pi f\, t + \phi\right)$. (0,75 *puntos*)

4. Calcular la probabilidad de bit erróneo. (0,65 *puntos*)

5. Se recibe la señal ruidosa $r(t) = 8{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\left(2\pi 10^{9} t + \pi/6\right)$. Calcular su coordenada en la base ortonormal e indicar la decisión que tomará el receptor. (0,40 *puntos*)

6. Suponga que el sistema se modifica para transmitir únicamente los símbolos 3 (representando el bit '0') y 4 (representando el bit '1'). Los demás parámetros (R_b, potencia media recibida, temperatura de ruido) no se modifican. Determinar la probabilidad de error de bit. (0,75 *puntos*).

Nota: utilice la fórmula del receptor binario óptimo para símbolos equiprobables.

(Puede usar esta página para completar la resolución de uno o varios apartados)

Calidad en M-ASK (M = número de símbolos en la constelación): $P_s = \frac{M-1}{M}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{3\left(\log_2 M\right)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$

x	0	2	4	6	8
2,0	4,6777e-03	4,2805e-03	3,9142e-03	3,5765e-03	3,2656e-03
2,1	2,9795e-03	2,7164e-03	2,4747e-03	2,2528e-03	2,0494e-03
2,2	1,8628e-03	1,6921e-03	1,5358e-03	1,3929e-03	1,2623e-03
2,3	1,1432e-03	1,0345e-03	9,3543e-04	8,4522e-04	7,6314e-04
2,4	6,8851e-04	6,2072e-04	5,5917e-04	5,0335e-04	4,5276e-04
2,5	4,0695e-04	3,6550e-04	3,2802e-04	2,9416e-04	2,6360e-04
2,6	2,3603e-04	2,1119e-04	1,8882e-04	1,6869e-04	1,5059e-04
2,7	1,3433e-04	1,1974e-04	1,0665e-04	9,4918e-05	8,4413e-05
2,8	7,5013e-05	6,6610e-05	5,9102e-05	5,2401e-05	4,6424e-05
2,9	4,1098e-05	3,6355e-05	3,2134e-05	2,8382e-05	2,5049e-05
3,0	2,2090e-05	1,9466e-05	1,7141e-05	1,5082e-05	1,3260e-05
3,1	1,1649e-05	1,0226e-05	8,9696e-06	7,8617e-06	6,8854e-06
3,2	6,0258e-06	5,2694e-06	4,6044e-06	4,0202e-06	3,5074e-06
3,3	3,0577e-06	2,6636e-06	2,3185e-06	2,0166e-06	1,7526e-06
3,4	1,5220e-06	1,3207e-06	1,1452e-06	9,9220e-07	8,5900e-07
3,5	7,4310e-07	6,4234e-07	5,5482e-07	4,7885e-07	4,1296e-07
3,6	3,5586e-07	3,0642e-07	2,6365e-07	2,2667e-07	1,9472e-07
3,7	1,6715e-07	1,4337e-07	1,2288e-07	1,0524e-07	9,0055e-08
3,8	7,7004e-08	6,5793e-08	5,6171e-08	4,7919e-08	4,0847e-08
3,9	3,4792e-08	2,9612e-08	2,5183e-08	2,1400e-08	1,8171e-08
4,0	1,5417e-08	1,3071e-08	1,1073e-08	9,3727e-09	7,9276e-09
4,1	6,7000e-09	5,6582e-09	4,7746e-09	4,0258e-09	3,3919e-09
4,2	2,8555e-09	2,4021e-09	2,0191e-09	1,6958e-09	1,4232e-09
4,3	1,1935e-09	1,0000e-09	8,3732e-10	7,0052e-10	5,8561e-10
4,4	4,8917e-10	4,0829e-10	3,4052e-10	2,8378e-10	2,3630e-10
4,5	1,9662e-10	1,6347e-10	1,3580e-10	1,1273e-10	9,3503e-11
4,6	7,7496e-11	6,4179e-11	5,3108e-11	4,3913e-11	3,6281e-11
4,7	2,9953e-11	2,4708e-11	2,0366e-11	1,6774e-11	1,3805e-11
4,8	1,1352e-11	9,3279e-12	7,6586e-12	6,2831e-12	5,1506e-12
4,9	4,2189e-12	3,4531e-12	2,8240e-12	2,3077e-12	1,8844e-12

Tabla 1. Función complementaria del error, *erfc* (*x*)

RESOLUCIÓN PROBLEMA 2.

1. Con la PEP determinamos la energía del símbolo de mayor amplitud, s_1 o s_4:

$$E_4 = PEP \cdot T = 9 \cdot 10^{-6}\,\text{J}$$

$$\text{siendo } R_s = \frac{R_b}{2} = 8 \text{ Mbaudios} \rightarrow T = 1{,}25 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Calculamos d, distancia entre símbolos, y, a partir de su valor, la energía del símbolo 3:

$$\sqrt{E_4} = \frac{3d}{2} \rightarrow d = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{J}$$

$$E_3 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 10^{-6} \text{ J}$$

La energía media por símbolo es: $E_{s,tx} = \frac{1}{2}\left(E_3 + E_4\right) = 5 \cdot 10^{-6}\,\text{J}$

y la potencia media: $p_{tx} = E_{s,tx} \cdot R_s = 40 \text{ W } \left(46 \text{ dBm}\right)$.

2. La atenuación se calcula a partir de los valores de potencia media transmitida y recibida.

$$\left.\begin{array}{l} P_{tx} = 46 \text{ dBm} \\ P_{rx} = -74 \text{ dBm} \end{array}\right\} At = P_{tx} - P_{rx} = 120 \text{ dB}$$

3. A partir de la potencia media recibida ($4 \cdot 10^{-11}$ W) se determina la energía por símbolo y la distancia d entre símbolos en recepción:

$$E_{s,rx} = P_{rx} \cdot T = 5 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2\right] = 1{,}25\, d^2 \rightarrow d = 2 \cdot 10^{-9}$$

Las coordenadas de los símbolos son:

$$s_1: \ -3d/2 = -3 \cdot 10^{-9}$$

$$s_2: \ -d/2 = -10^{-9}$$

$$s_3: \ d/2 = 10^{-9}$$

$$s_4: \ 3d/2 = 3 \cdot 10^{-9}$$

La raíz de energía del símbolo 2 es $d/2$. El símbolo puede escribirse como:

$$A_2 = \sqrt{E_2}\sqrt{\frac{2}{T}} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{2}{1{,}25 \cdot 10^{-7}}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

$$s_2\left(t\right) = 4 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^9 t + \pi\right)$$

4. A partir de la energía media recibida se determina la energía por bit, E_b, y la relación E_b/N_0:

$$\left.\begin{aligned} E_b &= \frac{E_{s,rx}}{2} = 2{,}5\cdot 10^{-18}\ \text{J} \\ N_0 &= k\cdot T_T = 8{,}257\cdot 10^{-20}\ \text{J} \end{aligned}\right\} E_b/N_0 = 30{,}28 \text{ veces } (14{,}8 \text{ dB})$$

La probabilidad de símbolo es:

$$P_s = \frac{3}{4}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{6}{15}\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{3}{4}\operatorname{erfc}(3{,}48) = \frac{3}{4}\cdot 8{,}59\cdot 10^{-7} = 6{,}44\cdot 10^{-7}$$

y la probabilidad de error de bit es aproximadamente la mitad: $P_b = 3{,}22\cdot 10^{-7}$.

5. Para representar geométricamente la señal recibida se calcula su raíz de energía (distancia al origen):

$$\sqrt{E_r} = A_r\sqrt{\frac{T}{2}} = 8{,}8\cdot 10^{-6}\sqrt{\frac{1{,}25\cdot 10^{-7}}{2}} = 2{,}2\cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

La coordenada es la proyección sobre el eje I:

$$\sqrt{E_r}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}9\cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

Teniendo en cuenta la posición de los diferentes símbolos el receptor decidirá que se ha transmitido el símbolo s_3 (es el más cercano a esa coordenada).

6. Para mantener el régimen binario el periodo de símbolo disminuye a la mitad. La energía de símbolo también se reduce a la mitad y la distancia entre símbolos se reduce en un factor raíz de 2.

$$T = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_b} = 6{,}25\cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

$$E_{s,rx} = P_{rx}\cdot T = 2{,}5\cdot 10^{-18}\ \text{J} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2\right] = 1{,}25d^2 \rightarrow d = \sqrt{2}\cdot 10^{-9}$$

Los símbolos están situados a distancias $d/2$ y a $3d/2$ con respecto al origen.

Se aplica la fórmula de calidad para receptor binario:

$$P_b = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_0 2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1{,}4142\cdot 10^{-9}}{2{,}03\cdot 10^{-10}\cdot 2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(2{,}46) = \frac{1}{2}\left(5{,}0335\cdot 10^{-4}\right) = 2{,}517\cdot 10^{-4}$$

donde $\sigma_0 = \sqrt{\frac{N_0}{2}} = 2{,}03\cdot 10^{-10}$