TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

Examen ordinario, junio de 2016

TSC

El examen de la 1ª parte de la asignatura consta de: problema 1 (4 puntos), problema 2 (6 puntos).

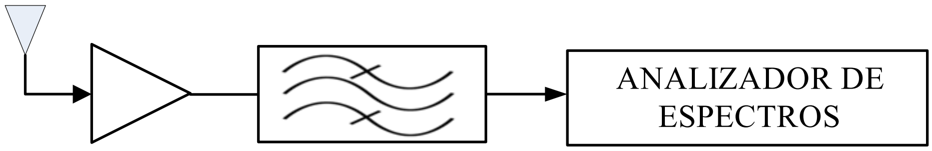
Responder en hojas de examen, utilizando hojas **distintas** para cada problema. Si necesita varias hojas para el mismo problema, numérelas. Ponga el nombre en todas las hojas.

PROBLEMA 1 (4 puntos). Para caracterizar un amplificador se han inyectado tonos de potencia variable, p_{in}, y se ha medido la potencia a la salida, p_{out}; el resultado se indica en la tabla.

p_{in}	p_{out}
1 μW	100 μW
2 μW	200 μW
10 μW	0,98 mW
20 μW	1,78 mW
50 μW	3,98 mW
100 μW	5,01 mW
200 μW	7,96 mW
500 μW	10 mW
1 mW	10 mW

1) Determinar ganancia de pequeña señal (en dB) y el punto de compresión a 1 dB (en dBm). (25%)

El amplificador forma parte del sistema que se muestra en la figura.



$A_2 = 3$ dB $\quad F_3 = 33{,}5$ dB

- La antena capta un ruido térmico de temperatura $T_a = 300$ K. No recibe ninguna señal.
- El filtro paso banda atenúa 3 dB en su banda de paso (400-600 MHz).
- El analizador de espectros tiene una figura de ruido de 33,5 dB.
- El sistema está a temperatura física $T_0 = 300$ K y adaptado a $R = 50\ \Omega$.
- Constante de Boltzmann, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

2) Se sabe que la temperatura equivalente del sistema (amplificador + filtro + analizador de espectros) es de 14330 K. Determinar la figura de ruido del amplificador. (40%)

3) En la pantalla del analizador de espectros se visualiza el siguiente espectro. Indicar el ancho de banda de resolución, RBW, empleado en el analizador. (35%)

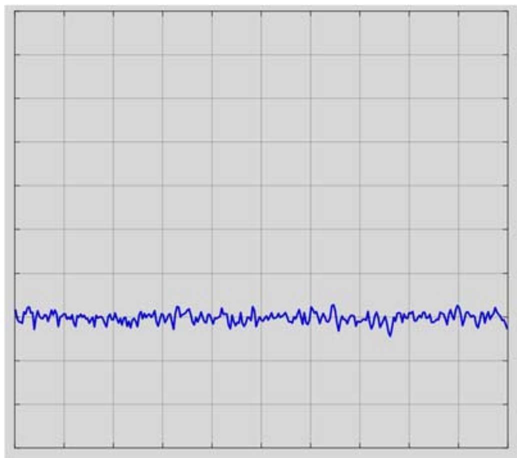
Frecuencia central: 500 MHz

SPAN: 100 MHz.

Factor de escala vertical: 10 dB/división

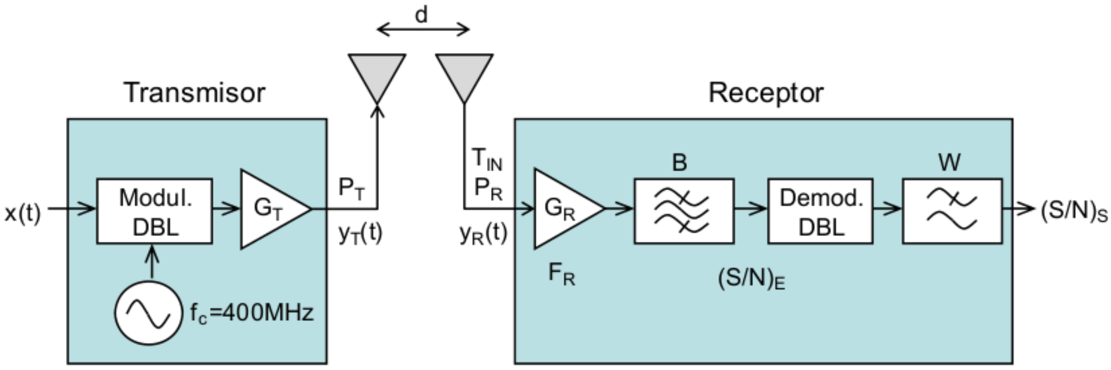
Nivel de referencia: -10 dBm

Ancho de banda de resolución: a determinar



Notas. El apartado 2 no requiere haber resuelto el apartado 1. El apartado 3 también puede resolverse de manera independiente a los anteriores.

PROBLEMA 2 (6 puntos). Se dispone de un sistema de telecomunicación con modulación DBL, con el que se transmite una señal moduladora, $x(t)$, utilizando una portadora de frecuencia 400 MHz.



La señal moduladora se caracteriza por un valor cuadrático medio de 0,5 V^2, valor de pico 1 V y ancho de banda de 12,5 kHz. Suponga $R = 50\ \Omega$.

1) Obtenga el ancho de banda de la señal transmitida, $y_T(t)$. (10%)

El receptor está construido con un demodulador coherente convencional y cuenta con un amplificador de figura de ruido, $F_R = 10$ dB, y elevada ganancia, $G_R = 30$ dB. La antena capta un ruido térmico de temperatura equivalente $T_{in} = 300$ K.

2) Se requiere una $(S/N)_S$ superior a 40 dB. Calcule la mínima $(S/N)_E$ (en dB) y la mínima potencia media recibida, P_R (en W), para que el sistema funcione correctamente. (40%)

Nota. En los cálculos considere que el ancho de banda de los filtros del receptor, B y W, es el valor más pequeño admisible. Indique las suposiciones que considere necesarias y oportunas sobre la naturaleza del ruido en el receptor.

El canal radioeléctrico se modela como lineal e invariante el tiempo, con una atenuación, A [dB], que viene expresada en función de la frecuencia, f [MHz], y de la distancia entre transmisor y receptor, d [km]:

$$A\,[\text{dB}] = A_0 + 20\cdot\log_{10} f\,[\text{MHz}] + 20\cdot\log_{10} d\,[\text{km}]$$

3) En unas medidas previas, con una separación transmisor-receptor de 30 km se obtuvo el siguiente resultado: al transmitir una potencia de 100 W se recibía una potencia de 1,75 pW. Calcule el valor de la constante A_0 sabiendo (15%)

4) Se decide ahora separar el transmisor y el receptor una distancia de 10 km, y se emplea un transmisor cuya potencia equivalente de pico, *PEP*, es 50 W. Determine la potencia media recibida en este caso, e indique si se cumple el objetivo de calidad definido en el apartado 2. (35%)

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

Examen ordinario, junio de 2016

TSC

El examen de la 2ª parte de la asignatura consta de: problema 3 (4 puntos), problema 4 (6 puntos).

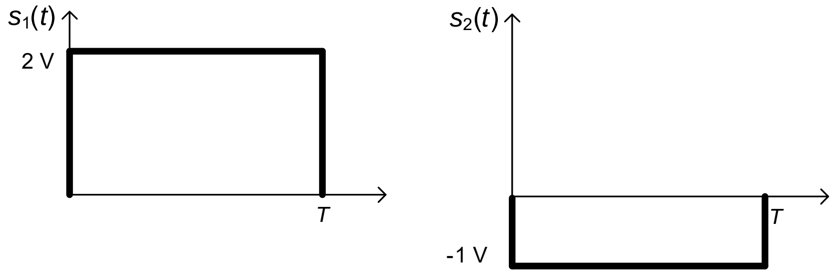
Responder en hojas de examen, utilizando hojas **distintas** para cada problema. Si necesita varias hojas para el mismo problema, numérelas. Ponga el nombre en todas las hojas.

PROBLEMA 3 (4 puntos). Se dispone de un conversor analógico-digital que emplea cuantificación uniforme. Su frecuencia de muestreo es 8 kHz y genera un régimen binario de 96 kbit/s. El nivel de sobrecarga o fondo de escala, x_{sc}, es configurable, pudiendo seleccionarse los siguientes valores: ±1 V, ±3 V, ±5 V.

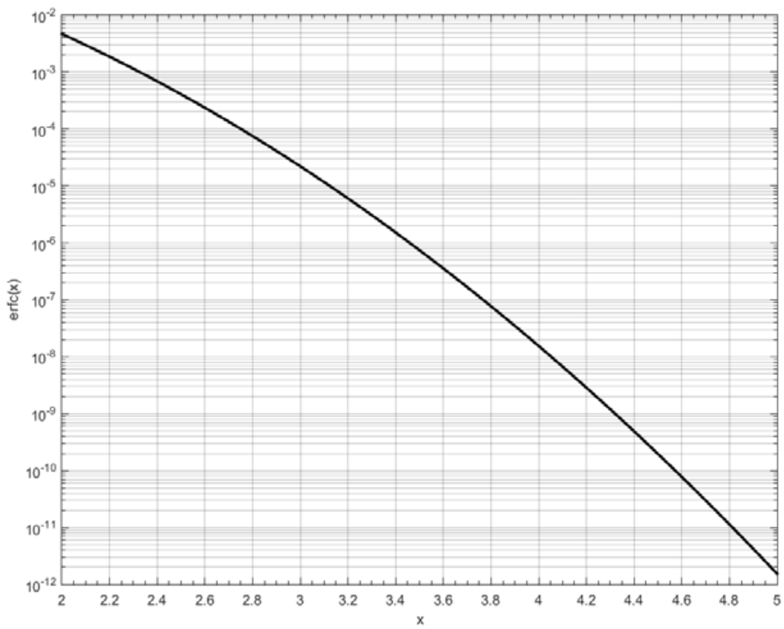
1) Se introduce una señal de valor de pico, x_p = 1,5 V, y valor cuadrático medio $\langle x^2(t)\rangle$ = 0,3 V^2. Seleccionar, entre las 3 opciones posibles, el fondo de escala que permita obtener la mejor relación señal a ruido de cuantificación, justificando la elección. Indicar el valor de dicha relación señal a ruido (en dB). (40%)

La salida del conversor A/D se lleva a un transmisor banda base, que emplea las dos señales que se muestran en la figura. La línea de transmisión introduce una atenuación de 133 dB. La temperatura de ruido total equivalente en el receptor, incluyendo el ruido de la línea de transmisión, es de 10000 K. Considerar R = 1 Ω.

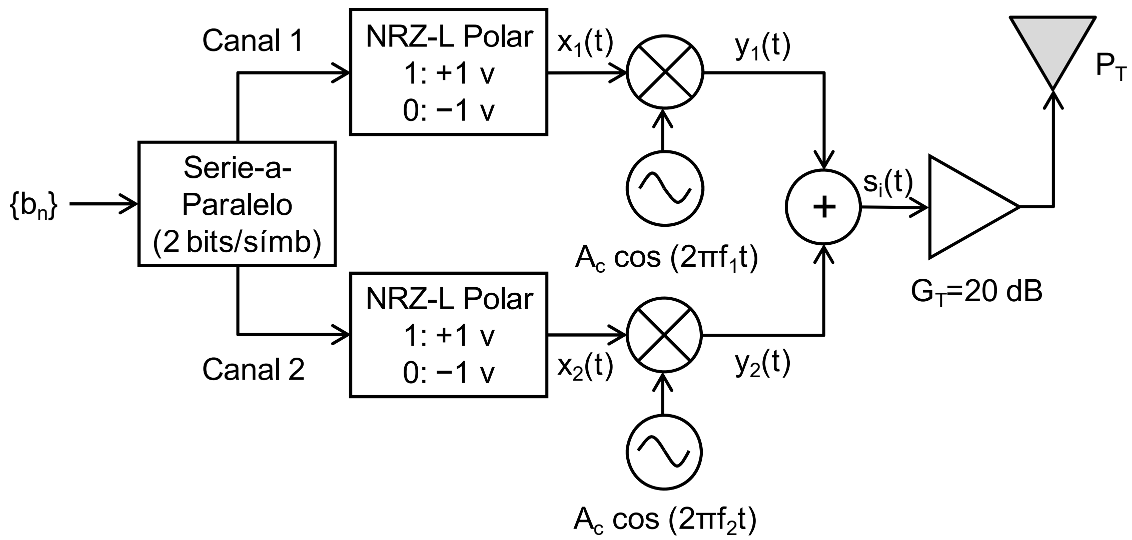
2) Calcular la energía de ambas señales en recepción y determinar la distancia d entre ellas en un espacio vectorial generado con una base ortonormal; no es necesario determinar la expresión de dicha base. Utilizando las fórmulas del receptor binario óptimo determinar la probabilidad de bit erróneo, P_b. (60%)



Notas. El apartado 2 puede resolverse de manera independiente al apartado 1. Se adjunta gráfica de función de error complementario.



PROBLEMA 4 (6 puntos). Se desea diseñar un sistema de comunicación digital paso banda para el comando y control remoto de drones. Para ello se utiliza un esquema de modulación como el de la figura, donde la secuencia de datos a transmitir se divide en dos canales, mandando los bits pares por el canal 1 y los bits impares por el canal 2. El régimen binario de trabajo es igual a 128 kbps.



Los codificadores NRZ generan pulsos de ±1 V y duración T segundos. La amplitud de pico de los osciladores locales es A_c = 10 mV y sus frecuencias son f_1 = 450000,0 kHz y f_2 = 450032,0 kHz; el amplificador de salida tiene una ganancia en potencia de 20 dB. Considere la impedancia característica de todo el circuito igual a 1 Ω.

1) Indique la expresión matemática de las señales generadas por el modulador, $s_i(t)$. Compruebe que dichas señales pueden representarse a partir de una base ortonormal de dimensión dos y obtenga la expresión matemática de los vectores de dicha base.

Dibuje la constelación resultante indicando el valor numérico de las coordenadas de las señales. (30 %)

2) Calcule la potencia media transmitida, P_T. Exprese el resultado en dBm. (20 %)

Se define el alcance del drone como aquella distancia, d, para la cual la probabilidad de error de bit del receptor es inferior a 10^{-6}. Si se utiliza como receptor un detector óptimo coherente:

3) Calcule el alcance que se conseguiría si la temperatura equivalente de ruido total a la entrada del receptor es igual a 50350 K y la atenuación del medio en la banda de trabajo se modela como: A [dB] = 80 + 20·log d [km]. Utilice la gráfica de la función de error complementario del problema 3. (30 %)

Ayuda: La probabilidad de error de símbolo puede calcularse a partir de la expresión de otra modulación que tenga la misma constelación que la obtenida en el apartado 1.

Nota: si no ha resuelto el apartado 2, considere P_T =10 dBm.

4) Una manera de duplicar el alcance del drone, sin tener que aumentar la potencia de transmisión, consiste en reducir el régimen binario del sistema. Calcule qué nuevo valor se necesita para ello si consideramos que el nivel total de ruido permanece constante. En ese caso, ¿la base de señales que obtuvo en el apartado 1 seguiría siendo ortogonal? (20 %)

Soluciones

PROBLEMA 1

1) g_0 = 100 μW/1 μW = 100 → G_0 = 20 dB

P_{1dB} = 6 dBm (3,98 mW), ya que la ganancia en ese punto es 20 - 1=19 dB. El punto de compresión a 1 dB se suele expresar referido a la salida.

2) Se considera que el amplificador está en zona lineal (se aplica ganancia de pequeña señal, g_0), dado que solo se está introduciendo ruido a la entrada:

$$g_1 = 100$$

$$T_{e2} = (a_2 - 1)T_0 = 300 \text{ K, ya que } a_2 = 2$$

$$T_{e3} = (f_3 - 1)T_0 = (10^{3,35} - 1)T_0 = 671316 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + \frac{300}{g_1} + \frac{T_{e3}}{g_1 \cdot \frac{1}{a_2}} = 14330 \text{ K} \rightarrow T_{e1} = 900 \text{ K}$$

$$T_{e1} = (f_1 - 1)T_0 \rightarrow f_1 = 4 \rightarrow F_1 = 6 \text{ dB}$$

3) La densidad espectral de ruido a la entrada del analizador de espectros (hay que considerar las ganancias/pérdidas del amplificador y del filtro) es:

$$N_0 = k \cdot (T_e + T_a) \cdot g_1 \cdot \frac{1}{a_2} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (14330 + 300) \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = 10^{-17} \text{ W/Hz}$$

La potencia de ruido que se visualiza en el analizador de espectros es aproximadamente -80 dBm. Luego RBW = 1 MHz, ya que:

$$N = N_0 \cdot RBW = 10^{-11} \text{ W} \quad (-80 \text{ dBm})$$

PROBLEMA 2

1) El ancho de banda en DBL es dos veces el ancho de banda de la señal moduladora.

$B = 2W$ = 25 kHz

2) $(S/N)_E$ en DBL son 3 dB menos que $(S/N)_S$, por lo que $(S/N)_E$ = 37 dB.

$$T_{eT} = T_{in} + T_e = 300 + 300(9 - 1) = 3000 \text{ K}$$

$$N_0 = k \cdot T_{eT} = 4,14 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z = \frac{p_R}{N_0 \cdot W} = 10000 \rightarrow p_R = 5,175 \cdot 10^{-12} \text{ W} \; (-82,9 \text{ dBm})$$

Se ha considerado que el ruido interno del amplificador es la única contribución de ruido de todo el receptor; al ser el amplificador de alta ganancia, el resto de elementos (filtro, demodulador) puede despreciarse en el cálculo del ruido.

3) Las pérdidas totales para el caso que se indica son $A = 10 \cdot \log_{10}(100/1,75 \cdot 10^{-12})$ = 137,6 dB

Si aplicamos la expresión del modelo con los datos del caso concreto:

A (dB) = A_0 + 20·log₁₀(400) + 20·log₁₀(30) = A_0 + 81,6 dB. Igualando ambos resultados resulta A_0 = 56 dB.

4) Ahora las pérdidas son: A = 56 + 20·$\log_{10}$(400) + 20·$\log_{10}$(10) = 128 dB.

El transmisor transmite una potencia media:

$$p_t = PEP \cdot \left\langle x_n^2 \right\rangle = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ W } \left(44 \text{ dBm}\right)$$

$$\text{ya que: } \left\langle x_n^2 \right\rangle = \frac{\left\langle x^2 \right\rangle}{x_p^2} = \frac{0,5}{1^2} = 0,5 \text{ V}^2$$

Con lo que la potencia media recibida será:

$$P_r = P_t - A = 44 - 128 = -84 \text{ dBm}$$

que es inferior a los -82,8 dBm calculados en el apartado 2, por lo que, aunque por escaso margen, no seremos capaces de conseguir la calidad requerida con este transmisor y a esta distancia.

PROBLEMA 3

1) El conversor A/D está empleando una resolución de n = 12 bits, ya que $f_s \cdot n$ = 96 kbit/s.

El fondo de escala ±3 V proporcionará una mejor relación señal a ruido que ±5 V, puesto que el tamaño del escalón de cuantificación será menor, con la consiguiente reducción en el ruido de cuantificación. No es posible utilizar ±1 V puesto que la señal tiene picos de 1,5 V y se produciría un fuerte ruido de sobrecarga, con una degradación muy fuerte de la calidad.

$$\Delta = \frac{2 \cdot 3}{2^{12}} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{0,3}{\Delta^2/12} = 1677722 \rightarrow 62,2 \text{ dB}$$

2) Ambas señales pueden obtenerse de manera sencilla a partir de una base de dimensión 1. Estarán situadas en puntos opuestos con respecto al origen, por lo que su separación será simplemente la suma de las distancias al origen (raíz de energía) de cada una de ellas. El régimen simbólico es R_s = 96000 baudios, al ser un sistema binario.

En transmisión:

$$E_{s_1} = \frac{2^2}{R_s} = 4,167 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_{s_2} = \frac{1^2}{R_s} = 1,042 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

En recepción:

$$E_{s_1} = 2,083 \cdot 10^{-18}\ \text{J} \rightarrow \sqrt{E_{s_1}} = 1,443 \cdot 10^{-9}$$

$$E_{s_2} = 5,208 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \rightarrow \sqrt{E_{s_2}} = 0,722 \cdot 10^{-9}$$

$$d = \sqrt{E_{s_1}} + \sqrt{E_{s2}} = 2,165 \cdot 10^{-9}$$

$$= k \cdot T_{eT} = 1,38 \cdot 10^{-19} \rightarrow \sigma_0 = \sqrt{\frac{N_0}{2}} = 2,627 \cdot 10^{-10}$$

$$P_b = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{2} \cdot \sigma_0}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{2,165 \cdot 10^{-9}}{2\sqrt{2} \cdot 2,627 \cdot 10^{-10}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}(2,914) \cong 1,9 \cdot 10^{-5}$$

PROBLEMA 4

1) Directamente, del diagrama de bloques, se obtienen las señales a la salida del modulador:

$$s_{00}(t) = -A_c cos(2\pi f_1 t) - A_c cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_{01}(t) = +A_c cos(2\pi f_1 t) - A_c cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_{10}(t) = -A_c cos(2\pi f_1 t) + A_c cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_{11}(t) = +A_c cos(2\pi f_1 t) + A_c cos(2\pi f_2 t)$$

Cada canal, 1 y 2, representa un espacio de dimensión 1. A su vez, puesto que los dos osciladores locales, f_1 y f_2, son coherentes en fase, la condición de ortogonalidad entre ellos viene dada por la condición $f_2 - f_1 = n \cdot R_s/2 = n \cdot R_b/4 = n \cdot 32.000$, la cual se cumple exactamente para $n = 1$.

Así pues, tenemos dos espacios de dimensión 1 ortogonales entre sí, lo que da como resultado, un espacio vectorial completo de dimensión 2.

Ahora sólo quedaría normalizar los tonos f_1 y f_2 para conseguir la base ortonormal que estamos buscando. Sabiendo que $R = 1\ \Omega$, y que $T = 2 \cdot T_b = 2 / R_b$:

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} cos(2\pi f_1 t) = 357{,}77\ \cos(2\pi \cdot 450{,}000 \cdot 10^3 \cdot t)\ ; 0 \leq t \leq T$$

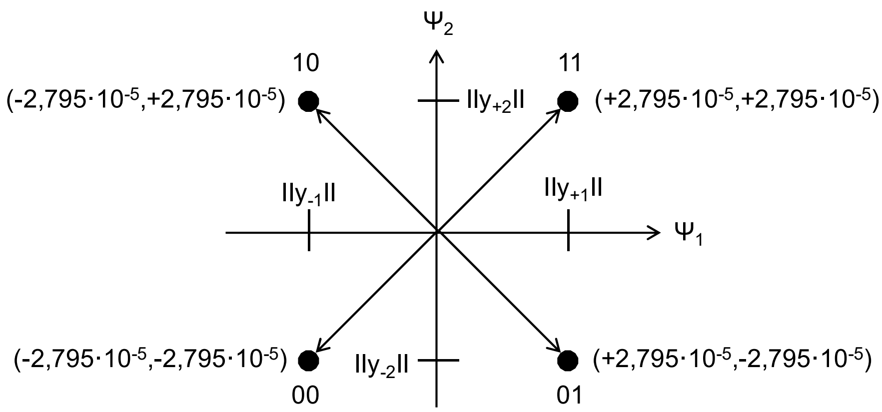
$$\Psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} cos(2\pi f_2 t) = 357{,}77\ \cos(2\pi \cdot 450{,}032 \cdot 10^3 \cdot t)\ ; 0 \leq t \leq T$$

Las dos señales del canal 1 están contenidas en la primera dimensión de la base, siendo su norma al cuadrado igual a su energía. Asimismo, las dos señales del canal 2 están contenidas en la segunda dimensión de la base, siendo su norma al cuadrado también igual a su energía. Es decir:

$$\|y_{\pm 1}\|^2 = \int_0^T \left(\pm 1 \cdot A_c\ cos(2\pi f_1 t)\right)^2 dt = \frac{A_c^2\ T}{2} = A_c^2 T_B = \frac{A_c^2}{R_B} = 7{,}8125 \cdot 10^{-10}\ J$$

$$\|y_{\pm 2}\|^2 = \int_0^T \left(\pm 1 \cdot A_c\ cos(2\pi f_2 t)\right)^2 dt = \frac{A_c^2\ T}{2} = A_c^2 T_B = \frac{A_c^2}{R_B} = 7{,}8125 \cdot 10^{-10}\ J$$

Finalmente, la combinación lineal de ambos canales genera el espacio vectorial de las señales moduladas, siendo su constelación la siguiente:



2) Primera forma de resolverlo (con la constelación).

La energía media por símbolo de la constelación anterior es igual a:

$$E_s = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4} = (2{,}795 \cdot 10^{-5})^2 + (2{,}795 \cdot 10^{-5})^2 = 1{,}5624 \cdot 10^{-9}\, J$$

A partir de aquí puede obtenerse la potencia media antes del amplificador como:

$$P_y = \frac{E_S}{T} = \frac{E_S}{2T_B} = \frac{E_S R_B}{2} = 10^{-4} w \ \rightarrow \ -10\ dBm$$

Quedando a la salida del transmisor:

$$P_T = P_y + G_T = -10\ dBm + 20\ dB = 10\ dBm$$

2) Segunda forma de resolverlo (sin la constelación).

La señal a la salida de cada uno de los multiplicadores es un tono de tensión de pico igual a 1 V, independientemente de que el codificador NRZ entregue +1 o -1 V. De modo que, siendo R = 1 Ω, la potencia de $y_1(t)$ y de $y_2(t)$ es: $A_c^2/2$. Cada canal se suma en cuadratura y, por ende, la potencia media de $y(t)$ es igual a la suma de las potencia de $y_1(t)$ y de $y_2(t)$. Es decir, $P_y = A_c^2 = 10^{-4}$ W, valor que expresado en dBm es igual a -10 dBm. Finalmente, la potencia a la salida del amplificador resulta ser igual a: -10 dBm + 20 dB = 10 dBm.

3) Primera forma de resolverlo (con la constelación).

Puesto que la constelación de este sistema es idéntica a la de una QPSK, su comportamiento frente al ruido también será idéntico. Así pues:

$$P_B = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_{BR}}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_{BT}}{a \cdot k \cdot T_e}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{P_T}{a \cdot R_B \cdot k \cdot T_e}}\right) < 10^{-6}$$

$$\frac{P_T}{a \cdot R_B \cdot k \cdot T_e} > [erfc^{-1}(2 \cdot 10^{-6})]^2 = 3{,}36^2$$

$$A(dB) < P_T(dBw) - 10 \log\ (3{,}36^2 \cdot R_B) - 10 \log\ (k \cdot T_e) = 100\ dB$$

Utilizando ahora la expresión de la atenuación del canal, obtenemos el alcance del drone:

$$A(dB) = 80 + 20 \log d(Km) < 100 \rightarrow d < 10\ km$$

3) Segunda forma de resolverlo (sin utilizar la constelación).

Como cada canal se procesa de forma ortogonal, puede considerarse que la detección de bits pares e impares se hace de forma independiente, dando una probabilidad de error de bit total igual a la probabilidad de error de bit de cualquiera de los dos canales.

A su vez, cada canal es binario antipodal, con una duración de bit en cada uno de ellos igual a dos veces la duración de bit de la secuencia de datos original, y una potencia media igual a la mitad de la potencia media total de la señal modulada. De ese modo, la probabilidad de error de bit de cada canal binario antipodal es:

$$P_B = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_{B\#}}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{P_{\#} \cdot T_{B\#}}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{\frac{P_R}{2} \cdot 2T_B}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{P_R}{R_B N_o}}\right)$$
$$= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{P_T}{a \cdot R_B \cdot k \cdot T_e}}\right)$$

Llegando a la misma expresión que antes. El resto sería idéntico.

Hay que hacer notar que N_0, en la expresión anterior, no cambia, puesto que tanto antes como ahora, N_0 representa la densidad espectral de la proyección del ruido blanco gaussiano aditivo sobre cada una de las bases del espacio vectorial.

4) Si se duplica el alcance del drone, la atenuación aumenta 6 dB, que es equivalente a 4 veces. Así pues, para mantener constante la P_b en el caso de que las potencias de señal y ruido no cambien, se precisa rebajar la R_b también cuatro veces. Por tanto, la solución es $R_b' = R_b/4 = 32$ kbps.

Para $R_b' = 32$ kbps, se tiene R_s'=16 kbauds. Entonces, $f_2 - f_1 = 32$ kHz $= n \cdot R_s'/2$, condición que se cumple ahora para $n = 4$. Por tanto, la base elegida seguiría siendo ortogonal.