TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

UPM. ETSIST. DIAC   EF – julio de 2014

Apellidos: ....

Nombre: .... DNI: ....

EJERCICIO 2 *(1,50 puntos)*: (Nota: no puntuarán los resultados sin justificar.)

Datos de un sistema de comunicaciones en banda base:

- Transmite una multiplexación MIC, con código NRZ-P (No Retorno a *Zero* Polar).
- En la línea se dispone de un ancho de banda de 520 kHz, y se filtra en coseno alzado con factor de redondeo máximo $\alpha = 1$.
- El MIC está formado por N (a determinar) canales vocales, y 2 canales de señalización. Cada canal de señalización tiene 5 bits.
- Las señales vocales se filtran anti-solapamiento a 6,25 kHz, y se muestrean a 1,6 veces la frecuencia de Nyquist.
- La cuantificación es no uniforme, Ley A, con el valor típico $A = 87{,}6$. Se trabaja a fondo de escala. El factor de cresta de la voz es, aproximadamente, 12 dB (en unidades naturales vale aproximadamente 4).
- Se requiere una calidad señal a ruido de cuantificación de, al menos, 40 dB.

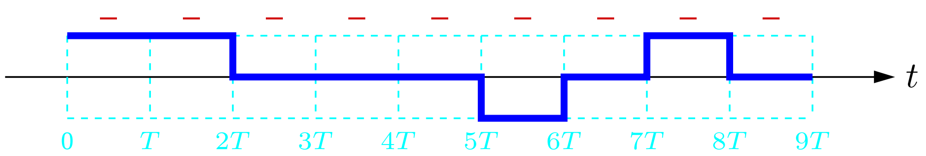
1. Calcule el régimen binario que soporta el sistema. *(0,20 puntos.)*

2. Calcule el valor mínimo del número de bits por muestra. *(0,30 puntos.)*

3. Con los resultados anteriores, calcule el máximo número de canales de voz, N, que puede transmitir el sistema. *(0,30 puntos.)*

4. Se cambia el codificador de línea NRZ-P por un duobinario. Repita los tres apartados anteriores. ¿Qué régimen binario se transmite? ¿Qué ancho de banda se ocupa? (Recuerde que el código duobinario tiene la mitad de ancho de banda que un NRZ-P.) *(0,50 puntos.)*

5. Trabajando con el código duobinario se recibe la señal de la figura. Sobre la propia figura, indique la secuencia binaria decodificada. *(0,20 puntos.)*



RESOLUCIÓN EJERCICIO 2.

1. Ocupamos el ancho de banda de la línea con un coseno alzado, evitando la IIS:

$$B = \frac{R_s}{2}\,(1+\alpha) \quad \rightarrow \quad 520(\mathrm{k}) = \frac{R_s}{2}\,(1+1) = R_s$$

Como $M = 2$: $R_b = R_s = 520$ kbps

2. Imponemos la calidad requerida, trabajando a fondo de escala:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6\,n - 10\,\log\left[\frac{K_c^2}{3}\right] - 0 + G_c = 6\,n - 10\,\log\left(K_c^2\right) + 10\,\log(3) + 24$$

$$40 \leq 6\,n - 12 + 10\,\log(3) + 24$$

$$n \geq 3{,}87 \quad \rightarrow \quad n = 4 \text{ bits/muestra}$$

3. Relacionamos el régimen que se transmite con el régimen del MIC:

$$f_m = 1{,}6 \cdot 2 \cdot 6{,}25(\mathrm{k}) = 20 \text{ kHz}$$

$$N_T(\text{bits/trama}) = N \cdot 4 + 2 \cdot 5 = N \cdot 4 + 10$$

$$R_b = N_T \cdot f_m$$

$$520(\mathrm{k}) \geq (N \cdot 4 + 10)\,20(\mathrm{k}) \quad \rightarrow \quad N \leq 4 \text{ canales vocales}$$

4. Como el código duobinario ocupa la mitad de ancho de banda que el NRZ-P, podemos transmitir un régimen binario doble:

$$R_b' = 2\,R_b = 1040 \text{ kbps}$$

Los parámetros del cuantificador no varían. Por lo tanto:

$$n' = n = 4 \text{ bits/muestra}$$

Ahora:

$$1040(\mathrm{k}) \geq (N \cdot 4 + 10)\,20(\mathrm{k}) \quad \rightarrow \quad N \leq 10{,}5$$

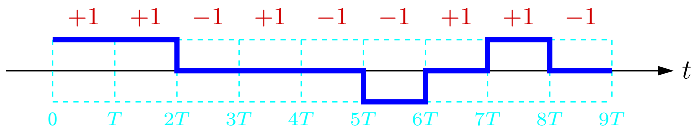
De manera que $N = 10$ es el número máximo de canales vocales que puede transmitir el sistema. Y en ese caso el régimen binario realmente transmitido es:

$$R_b' = (10 \cdot 4 + 10)\,20(\mathrm{k}) = 1000 \text{ kbps}$$

Que ocupa (con código duobinario) un ancho de banda:

$$B' = \frac{R_b'/2}{2}\,(1+\alpha) = 500 \text{ kHz}$$

5. En la figura se observa la secuencia binaria decodificada.



Un uno positivo es un bit 1; un uno negativo es un bit 0. Si se recibe un nivel positivo, el bit decodificado es +1 (y el anterior también). Si se recibe un nivel negativo, el bit decodificado es −1 (y el anterior también). Si se recibe nivel 0, el bit decodificado es el contrario al anterior. (Queda claro que en este caso no hace falta saber el bit previo.)

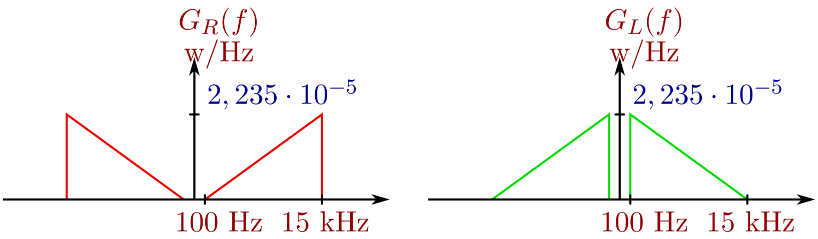
Apellidos: ....

Nombre: .... DNI: ....

PROBLEMA 1 *(3,50 puntos)*

Para realizar una transmisión FM estéreo, se parte de las señales de audio procedentes de dos canales, derecho (R) e izquierdo (L). A partir de dichas señales se genera otra señal distinta conocida como multiplex estéreo.

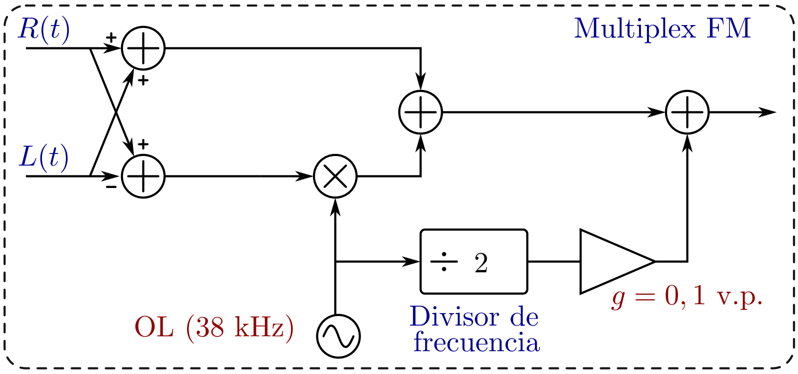
En el sistema que se pretende analizar las señales de los canales derecho e izquierdo se modelan como variables aleatorias de media nula y uniformemente distribuidas entre -1 y 1, estando incorreladas entre sí. Sus densidades espectrales de potencia son las mostradas en la figura.



Nota: Suponga todo el sistema adaptado a 1 Ω.

1. Calcule la potencia de las señales de los canales derecho e izquierdo. *(0,30 puntos)*

2. El sistema que genera la señal multiplex estéreo es el mostrado en la figura.



Dibuje el espectro a la salida del multiplexor. Indique claramente frecuencias y niveles sabiendo que la señal del oscilador local está normalizada. *(0,75 puntos)*

3. La desviación de frecuencia utilizada en la banda de FM comercial (88 MHz a 108 MHz) es de 75 kHz. Sabiendo que la señal moduladora es la salida del sistema anterior, calcule el ancho de banda ocupado por la señal modulada en FM. *(0,20 puntos)*

4. Escriba la expresión analítica de la señal modulada en FM si la P.E.P. del transmisor es de 8 W y su frecuencia es de 95 MHz. Utilize como señal moduladora normalizada la expresión $x_n(t)$. *(0,20 puntos)*

5. Los filtros de preénfasis y deénfasis introducen una mejora de 15 dB, mientras que el canal de transmisión se modela como un atenuador cuya atenuación responde a la siguiente expresión:

$$A(dB) = 32,45 + 20 \log f(MHz) + 20 \log d(km))$$

   Calcule la máxima potencia de ruido total a la entrada del receptor para que el receptor, a una distancia de 50 km, el demodulador trabaje por encima de su umbral. *(0,75 puntos)*

6. Si la temperatura de ruido a la entrada del receptor es de 10000 K, calcule el factor de ruido que ha de tener, como máximo, el receptor. *(0,60 puntos)*

7. El receptor es de tipo heterodino con frecuencia intermedia de 10,7 MHz. ¿Que valores puede tomar la frecuencia del oscilador local del receptor teniendo en cuenta que a la salida del mezclador sólo se consideran los productos de orden 3?. *(0,30 puntos)*

Resolución del Problema 1

1. La potencia de las señales es la integral de sus densidades espectrales de potencia.

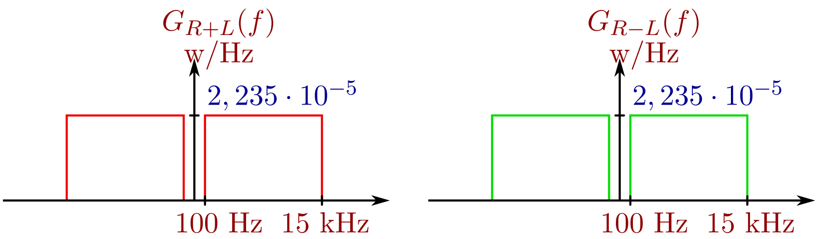
   Para el canal derecho.

   $$P_R = \int_{-\infty}^{\infty} G_R(f)df = 2\int_{100}^{15000} G_R(f)df = 14900 \cdot 2,235 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{3}W$$

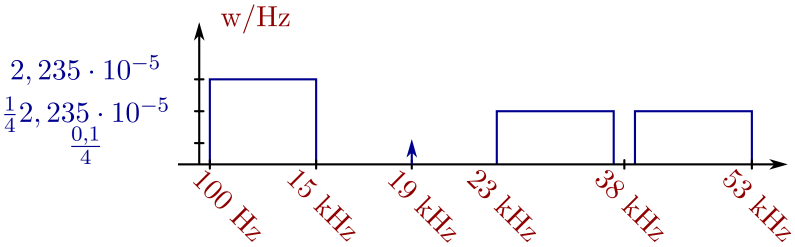
   Para el canal izquierdo:

   $$P_L = \int_{-\infty}^{\infty} G_L(f)df = 2\int_{100}^{15000} G_L(f)df = 14900 \cdot 2,235 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{3}W$$

2. Como las señales R y L están incorreladas, se suman en potencia, por lo que el espectro de las señales suma y diferencia es:

   El espectro a la salida del multiplexor es, entonces:

3. El ancho de banda de Carson responde a:

   $$B \approx 2(\Delta f + W) = 2(75 + 53)kHz = 256kHz$$

4. La amplitud de la señal modulada en FM está dada por la P.E.P. sobre 1 Ω, esto es, $P.E.P. = A^2/2$, de donde se saca que la amplitud es: $A = \sqrt{2 \cdot P.E.P.} = \sqrt{16} = 4V$.

   La expresión analítica de la señal es entonces:

   $$x_{fm}(t) = 4 \cdot \cos\left(2\pi 95 \cdot 10^6 \cdot t + 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 f \int_0^t x_n(\tau)d\tau\right)$$

   donde x_m, que no se conoce, es la señal moduladora, normalizada.

5. El primer paso a dar es calcular la Z umbral para el receptor. $Z_{th} = k \cdot (D+1)$. La relación de desviación es: $D = \Delta f/W = 75/53 = 1,41$, con lo que asumiendo el caso más conservador, $Z_{th} = 40 \cdot (2,41) = 96,4 \quad v.p.$. La relación señal a ruido a la entrada del receptor deberá ser, entonces:

   $$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{Z_{th}}{2 \cdot (D+1)} = \frac{96,4}{2 \cdot 2,41} = 20 \quad v.p.$$

o, de otra forma:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{Z_{th}}{2\cdot(D+1)} = \frac{k\cdot(D+1)}{2\cdot(D+1)} = 20 \quad v.p. \rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_e (dB) = 10\cdot\log(20) = 13dB$$

La potencia de señal se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} P_{rx}(dBW) = \quad & P_{tx}(dBW) - A_{canal}(dB) = P_{tx} - 32,45 - 20\log f(MHz) - 20\log d(km) \\ & 10\log(8) - 32,45 - 20\log(95) - 20\log(50) = -96,95dBW \end{aligned}$$

con lo que la potencia de ruido a la entrada del receptor ha de ser:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = P_{rx}(dBW) - N(dBW) \rightarrow N(dBW) = -96,95dBW - 13dB = -109,95dBW$$

6. La potencia de ruido a la entrada es $N(dBW) = 10\log(k(T_{en}+T_{eq})B)$. Convirtiendo la potencia de ruido de dBW a W

$$n(\mathrm{W}) = 10^{\frac{N(dBW)}{10}} = 10^{-10{,}995} \approx 1\cdot 10^{-11}$$

$$T_{en} + T_{eq} = \frac{n(w)}{k\cdot B} = \frac{1\cdot 10^{-11}}{1,38\cdot 10^{-23}\cdot 256\cdot 10^3} \approx 2830616$$

Como la temperatura de entrada es de 1000K, la equivalente ha de ser, como máximo, de 2929000K, que convertido a factor de ruido:

$$f_n = 1 + \frac{T_{eq}}{T_0} \approx \frac{2830616}{300} = 9435 \quad v.p. \rightarrow F_n(dB) = 39{,}74$$

7. De las mezclas de orden 3 sólo interesan:

$$\begin{aligned} FI = \quad & 2f_{ol} - f_{rf} \\ FI = \quad & 2f_{rf} - f_{ol} \\ FI = \quad & f_{ol} - 2f_{rf} \\ FI = \quad & f_{rf} - 2f_{ol} \end{aligned}$$

ya que el resto darían como resultado frecuencias muy superiores a la de FI (10,7 MHz).
Para la mezcla $2f_{ol} - f_{rf}$

$$10,7 = 2f_{ol} - 95 \rightarrow f_{ol} = (10,7+95)/2 = 52,85MHz.$$

Para la mezcla $2f_{rf} - f_{ol}$

$$10,7 = 2\cdot 95 - f_{ol} \rightarrow f_{ol} = 190 - 10,7 = 179,3MHz$$

Para la mezcla $f_{ol} - 2f_{rf}$

$$10,7 = f_{ol} - 2\cdot 95 \rightarrow f_{ol} = 190 + 10,7 = 200,7MHz$$

Para la mezcla $f_{rf} - 2f_{ol}$

$$10,7 = \cdot 95 - 2f_{ol} \rightarrow f_{ol} = (95 - 10,7)/2 = 42,15MHz$$

Apellidos: ....

Nombre: .... DNI: ....

PROBLEMA 2 *(3,50 puntos)*: (Nota: no puntuarán los resultados sin justificar.)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales:

- Todo el sistema está adaptado a $R = 50\ \Omega$.
- Se debe transmitir una información con $R_b = 400$ Mb/s.
- La modulación puede ser: ASK, PSK, QAM o FSK (coherente).
- Se transmite una potencia equivalente de pico $PEP = 10$ W.
- El medio se modela como un filtro en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 0{,}5$, ancho de banda $B = 1000$ MHz, y atenuación en la banda de paso $A_t = 110$ dB.
- El ruido a la entrada del receptor se corresponde con una temperatura $T_{in} = 1970$ K; el receptor tiene un factor de ruido $F = 6$ dB.
- La calidad final debe ser $BER = 10^{-5}$, o mejor.
- Se adjunta una gráfica de calidad para las modulaciones candidatas.

1. Realice un estudio teniendo en cuenta únicamente el ancho de banda. Determine qué modulaciones son adecuadas para el sistema. *(0,70 puntos.)*

2. Calcule la densidad espectral de ruido, total equivalente, a la entrada del receptor, en unidades naturales y en unidades logarítmicas. *(0,20 puntos.)*

3. Trabaje en este apartado con una constelación antipodal (2ASK = 2PSK). Calcule la energía por bit en recepción. Calcule la relación E_b/N_0 en unidades naturales y en unidades logarítmicas. Calcule la BER. *(0,60 puntos.)*

4. Realice un estudio teniendo en cuenta únicamente el requisito de calidad BER. Determine qué modulaciones son adecuadas para el sistema. (Recuerde que la PEP está fijada.) *(1,10 puntos.)*

5. En función de los resultados obtenidos en los apartados anteriores seleccione la modulación de menor número de símbolos, M, adecuada para el sistema. Comente la situación. *(0,40 puntos.)*

6. Ahora que la modulación está perfectamente definida, compruebe que el sistema funciona, calculando el ancho de banda que ocupa y la calidad BER que ofrece. *(0,30 puntos.)*

7. Para la modulación seleccionada, cacule la energía entre símbolos contiguos en el receptor. *(0,20 puntos.)*

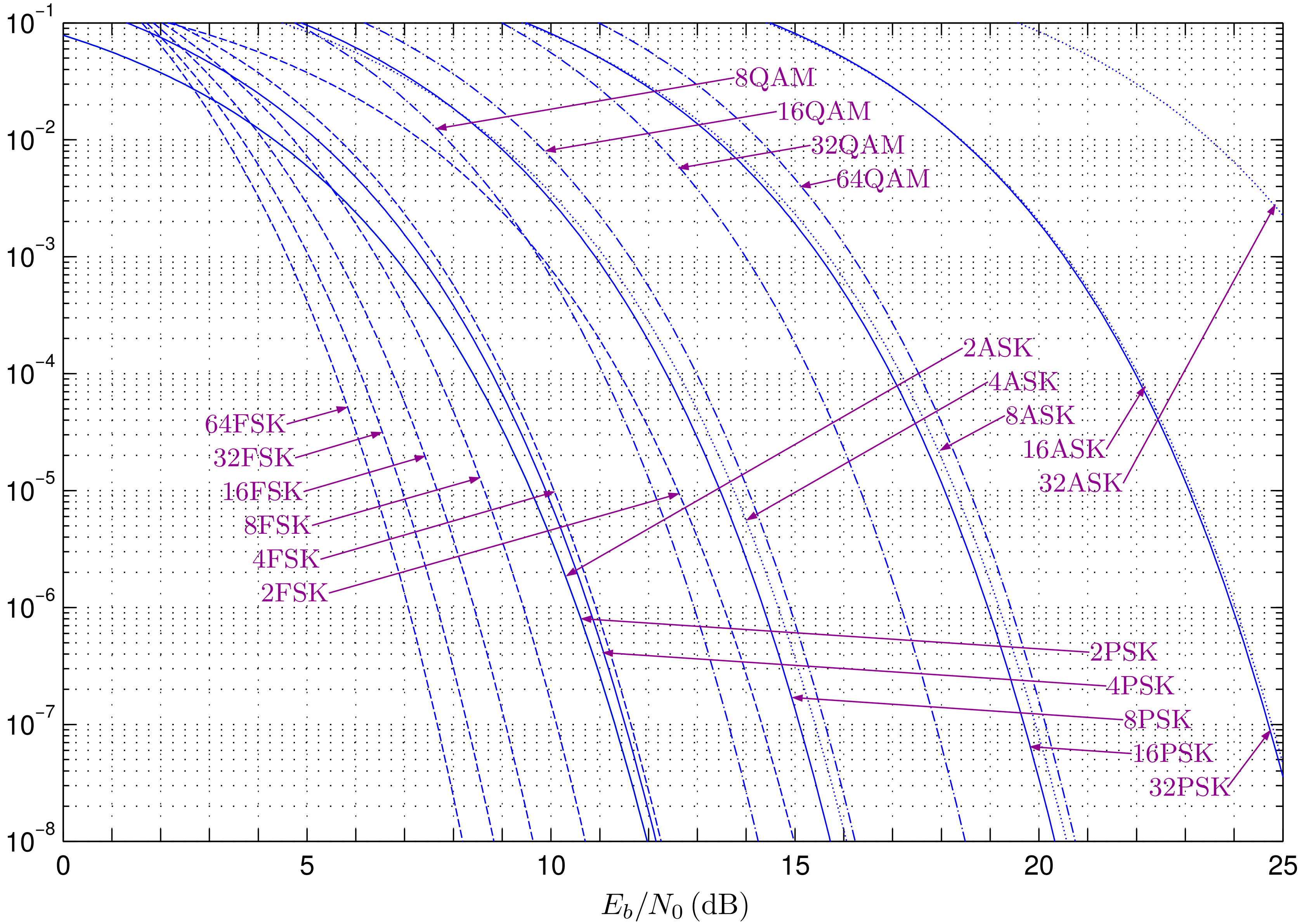


Figura 1: Probabilidad de error de símbolo (P_s) en función de E_b/N_0 (dB) para las modulaciones candidatas.

(Puede usar esta carilla para completar la resolución de uno o varios apartados.)

RESOLUCIÓN PROBLEMA 1.

1. Disponemos de 1000 MHz, filtrando en coseno alzado con redondeo 0,5 , para transmitir una información de 400 Mb/s.

   Empezamos estudiando las modulaciones lineales. Aunque el resultado es obvio, calculamos los valores de k que son adecuados:

   $$B_{lin} = R_s\,(1+\alpha)$$

   $$1000(\mathrm{M}) \geq R_s\,(1+0{,}5) = R_s \cdot 1{,}5$$

   $$R_s \leq 666.\widehat{6} \text{ Mbaudios}$$

   $$k \geq \frac{R_b}{R_s} = \frac{400}{666.\widehat{6}} = 0{,}6$$

   Luego todas las modulaciones lineales sirven.

   Ahora estudiamos la FSK coherente. En términos generales esperamos un M máximo permisible. Los cálculos son:

   $$k = \log_2(M)$$

   $$\Delta f = \frac{R_s}{2}$$

   $$B = (M-1)\,\frac{R_s}{2} + R_s\,(1+0{,}5) = \left(\frac{M}{2}+1\right)\frac{R_b}{k}$$

   $$M = 16: \quad B = \left(\frac{16}{2}+1\right)\frac{400(\mathrm{M})}{4} = 900 \text{ MHz}$$

   $$M = 32: \quad B = \left(\frac{32}{2}+1\right)\frac{400(\mathrm{M})}{5} = 1360 \text{ MHz}$$

   La 16FSK cumple, pero la 32FSK no. (También cumplen la 8FSK, la 4FSK y la 2FSK —y la 2FSK ocupa más ancho de banda que la 4FSK y la 8FSK—.)

2. Contribuciones:

   $$T_{in} = 1970 \text{ K}$$

   $$T_e = T_0\,(f-1) = 300\,(4-1) = 900 \text{ K}$$

   Densidad espectral unilateral:

   $$N_0 = k\,(T_{in}+T_e) = 1{,}3806 \cdot 10^{-23}\,(1970+900) \approx 3{,}9623 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

   $$N_0 \approx -164{,}0 \text{ dBm/Hz}$$

3. Para 2ASK la potencia media coincide con la PEP. Por lo tanto, la energía recibida por bit es:

   $$E_b = \frac{PEP/a_t}{R_b} = \frac{10/10^{11}}{400 \cdot 10^6} = 2{,}5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

   Relación E_b/N_0:

   $$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-19}}{3{,}9623 \cdot 10^{-20}} \approx 6{,}3095 \text{ v.p.}$$

   $$\frac{E_b}{N_0} \approx 8{,}0 \text{ dB}$$

En la gráfica leemos la probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s \approx 2 \cdot 10^{-4}$$

Y como la modulación es binaria:

$$P_b = P_s \approx 2 \cdot 10^{-4}$$

4. Comenzamos estudiando la relación E_b/N_0. Para todas las FSK, todas las PSK y la 2ASK la potencia media coincide con la PEP y ya tenemos un resultado numérico:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 8{,}0 \text{ dB}$$

Para ASK con $M = 4, 8, 16\ldots$ y para QAM con $M = 8, 16, 32\ldots$, la potencia media será una fracción de la PEP, menor conforme aumenta M, de forma que la relación E_b/N_0 disminuirá también al crecer M. Por lo tanto 8 dB es la mejor E_b/N_0 que podemos tener.

Ahora nos fijamos en la BER de las modulaciones lineales. Ya hemos comprobado que la constelación antipodal (2ASK = 2PSK) no ofrece suficiente calidad ($P_b = 10^{-4}$). También hemos establecido que $E_b/N_0 = 8$ dB es la mejor relación que podemos obtener para nuestro sistema con PEP fija. Nos exigen una calidad $BER \leq 10^{-5}$, si M crece también aumenta P_s, pero despacio, pues (suponiendo Gray):

$$P_s \approx k \cdot P_b = \log_2(M) \cdot P_b$$

Por ejemplo, para la constelación mayor de la gráfica $M = 64$ y $k = 6$, de manera que:

$$P_s \approx 6 \cdot 10^{-5}$$

Como no tendremos una P_s mayor, ni una E_b/N_0 mayor, es fácil comprobar que ninguna modulación lineal cumplirá con el requisito de BER.

Por último, trabajamos con la FSK. Para cualquier M de FSK tenemos:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 8{,}0 \text{ dB}$$

Convertimos la BER requerida (que es una P_b) en P_s para varios valores de M:

$$M = 8: \;\; P_s = \frac{2\,(8-1)}{8}\, 10^{-5} = 1{,}75 \cdot 10^{-5} \text{ (requerida)}$$

$$M = 16: \;\; P_s = \frac{2\,(16-1)}{16}\, 10^{-5} = 1{,}875 \cdot 10^{-5} \text{ (requerida)}$$

Es fácil apreciar, consultando la gráfica, que la 8FSK no cumple y la 16FSK sí. También cumplen la 32FSK y la 64FSK.

5. Al intersecar los resultados impuestos por las limitaciones de banda y calidad la única modulación adecuada para el sistema es la 16FSK.

Comentario: con un ancho de banda mucho mayor que R_b y una relación E_b/N_0 baja lo normal es trabajar con modulaciones no lineales. En este caso ninguna modulación lineal cumple con el requisito de calidad pero, de cualquier modo, desperdiciarían mucho ancho de banda. Estamos en la zona limitada por la potencia de la gráfica de comparación.

6. Calculamos la calidad BER. En la curva de la 16FSK, con $E_b/N_0 = 8$ dB, obtenemos:

$$P_s \approx 4 \cdot 10^{-6}$$

Pasamos a probabilidad de bit:

$$P_b = \frac{16}{2\,(16-1)} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-6}$$

El ancho de banda ya se calculó:

$$B = 900 \text{ MHz}$$

7. En una constelación ortogonal la distancia entre dos símbolos cualesquiera (todos son contiguos) es:

$$d = \sqrt{2E}$$

En nuestro sistema:

$$E = E_s = k\,E_b = 4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-19} = 10^{-18} \text{ J}$$

Luego la energía entre dos símbolos es:

$$E_d = d^2 = 2E = 2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$