Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones
Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería de Sonido e Imagen
Grado en Ingeniería Telemática

Tema 8

Transmisión digital banda base con ruido

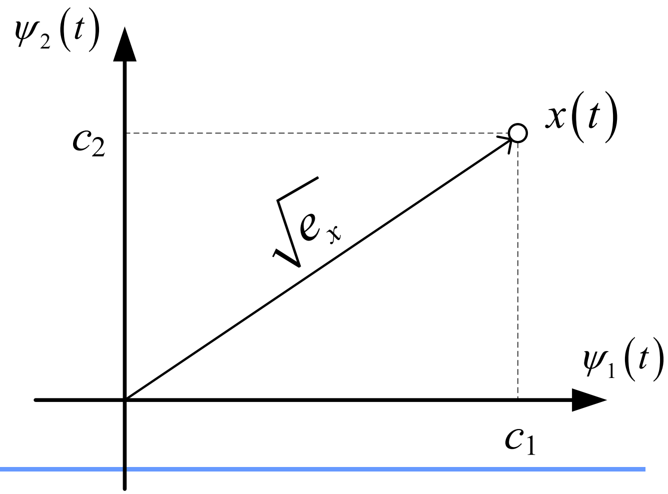
Tema 8. Transmisión digital banda base con ruido

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES

Representación vectorial

- Señal $x(t)$ en base ortonormal $\psi_i(t)$: $$x(t)=\sum_{i=1}^{N} c_i\,\psi_i(t)$$
- Características de la base ortonormal:
  - ✓ **Ortogonalidad** $$\langle \psi_i(t),\psi_j(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t)\psi_j(t)\,dt = 0 \qquad (i\neq j)$$
  - ✓ **Energía unidad** $$e_{\psi_i} = \frac{1}{R}\langle \psi_i(t),\psi_i(t)\rangle = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t)\psi_i(t)\,dt = 1 \text{ J}$$
- Obtención de las coordenadas (proyección):

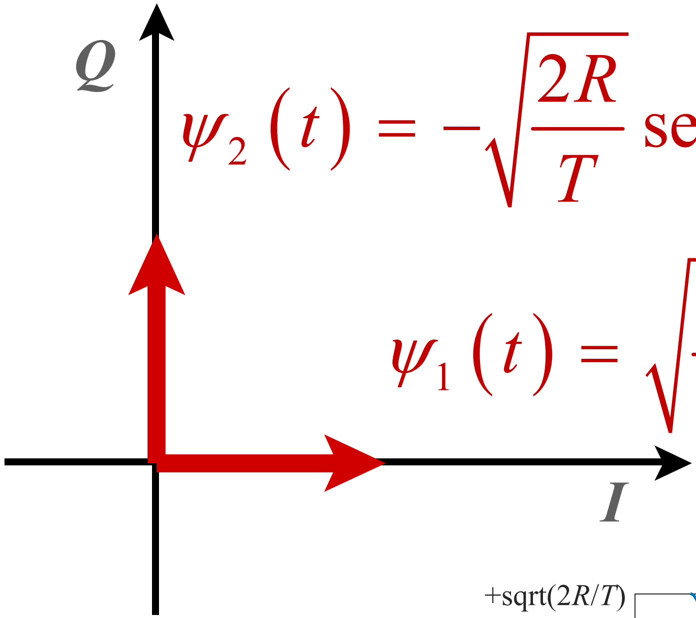
$$c_i = \frac{1}{R}\langle x(t),\psi_i(t)\rangle = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_i(t)\,dt$$



  - ✓ La energía de una señal es:

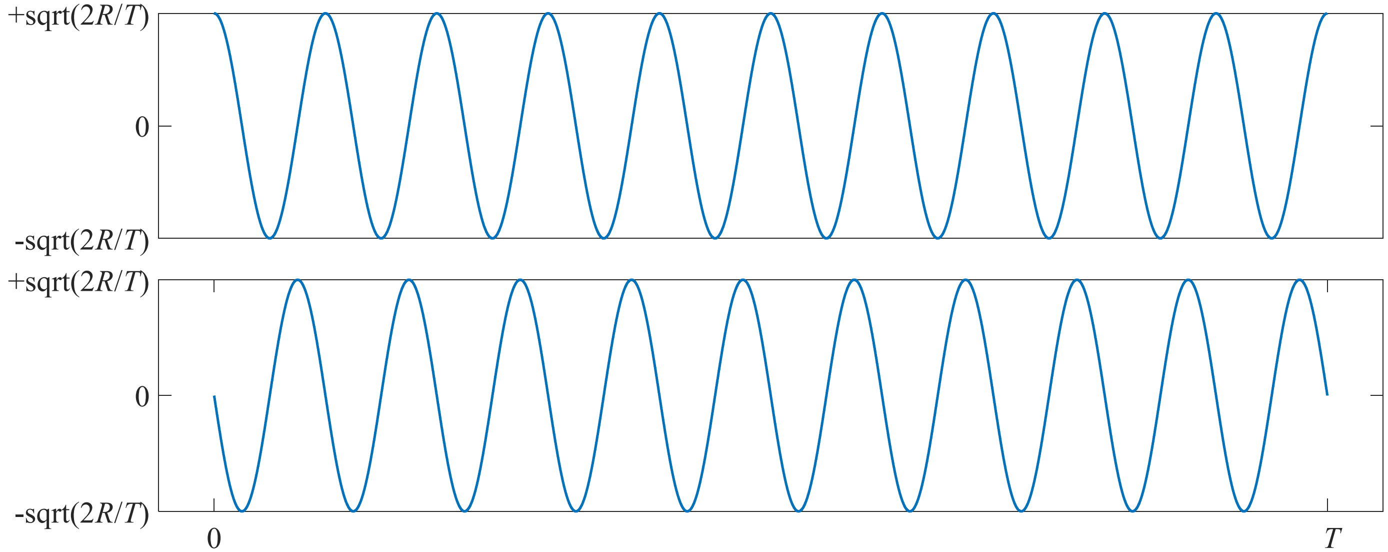
$$e_x = \sum_{i=1}^{N} c_i^2$$

Base para señales sinusoidales (base fase-cuadratura)



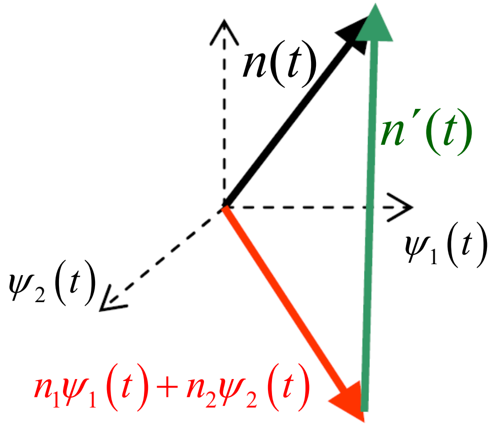
$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2R}{T}}\,\mathrm{sen}\left(2\pi f_c t\right)$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2R}{T}}\cos\left(2\pi f_c t\right)$$



Representación geométrica del ruido

- El ruido puede dividirse en 2 componentes:
  - ✓Una parte dentro del subespacio de señal
  - ✓Y otra parte, $n'(t)$, fuera



$$\boxed{n(t)=n_1\psi_1(t)+n_2\psi_2(t)+\ldots+n_N\psi_N(t)+n'(t)}$$

- Si el ruido es AWGN:
  - ✓$n'(t)$ es ortogonal al subespacio de señal. No interviene en proceso de detección
  - ✓Las coordenadas n_i son independientes. Media nula y varianza $\sigma_0^2=\frac{n_0}{2}$

- Representación del ruido en **fase-cuadratura**

$$\boxed{n(t)=\underbrace{n_F(t)}_{\text{En fase}}\psi_1(t)-\underbrace{n_C(t)}_{\text{En cuadratura}}\psi_2(t)+\underbrace{n'(t)}_{\text{Fuera del espacio de señales}}}$$

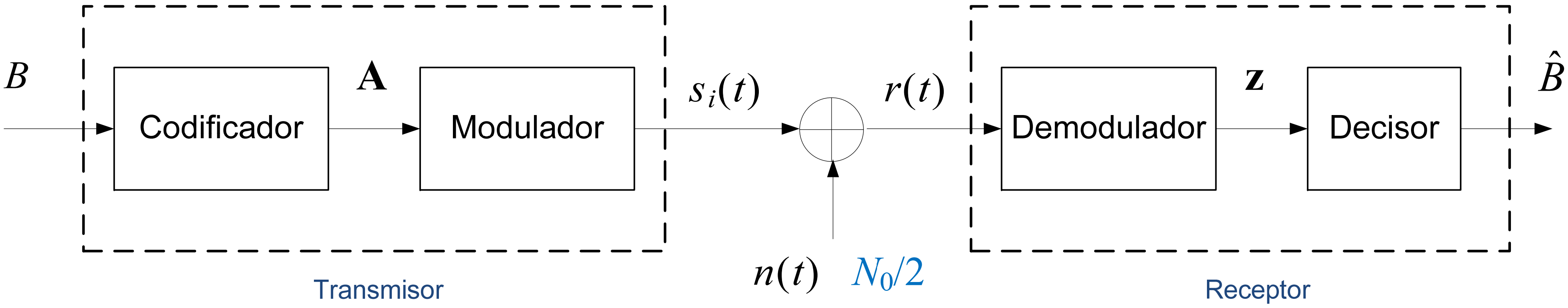
  - ✓Las componentes en fase y cuadratura están incorreladas entre sí y se comportan como ruido blanco gaussiano, de media nula y varianza $\sigma_0^2=\frac{n_0}{2}$

$$\langle n_F,n_C\rangle=0 \qquad \langle n^2\rangle=\langle n_F^2\rangle=\langle n_C^2\rangle=\frac{n_0}{2}$$

Tema 8. Transmisión digital banda base con ruido

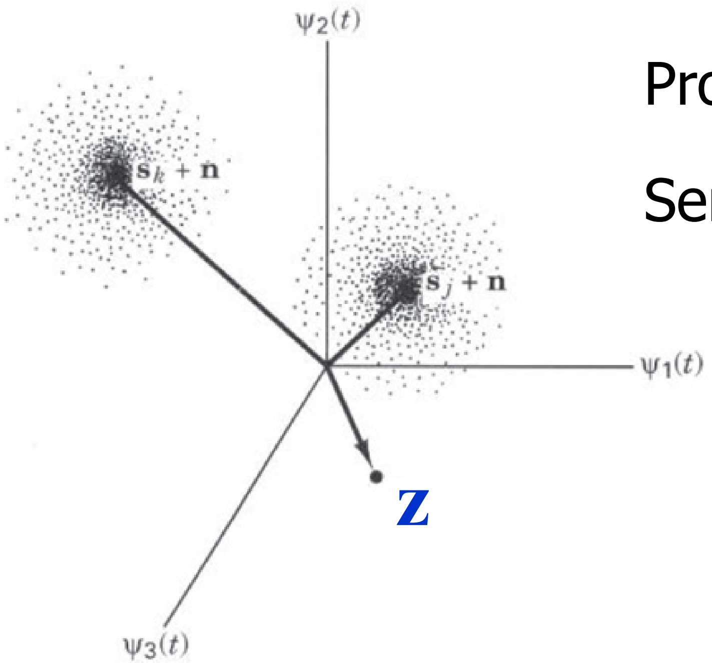
IMPLEMENTACIONES DEL RECEPTOR

Modelo de comunicación digital



- Símbolos B: alfabeto de M valores posibles
- Símbolo $\mathbf{A}$: vector N-dimensional (constelación)
  - ✓ Coordenadas $\{a_1 \ldots a_N\}$
- Modulador: transforma símbolo $\mathbf{A}$ en señales $s_i(t)$
- Se añade ruido $n(t)$ blanco gaussiano
  - ✓ En el receptor: $r(t) = s_i(t) + n(t)$
- Demodulador: reconstruye vector $\mathbf{z}$ (obtiene las coordenadas)
- Decisor: asigna símbolo $\hat{B}$ al vector $\mathbf{z}$

Señal recibida



Prototipos: s_j, s_k

Señal perturbada por ruido: $s_j + \mathbf{n}$, $s_k + \mathbf{n}$

Vector ruido

Demodulador

Determinación del vector $\mathbf{z}$

2 estructuras equivalentes

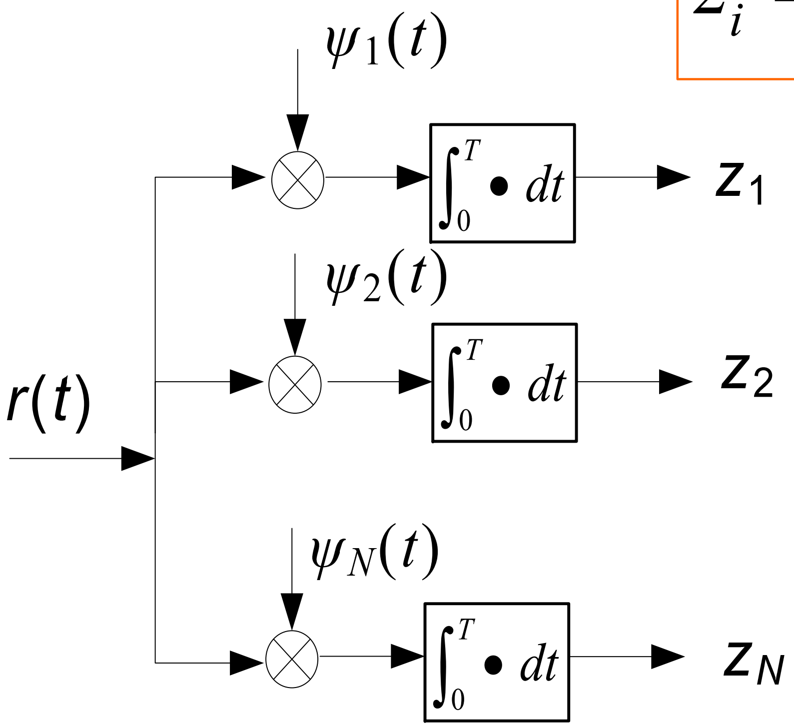
Correlador

Filtro adaptado

Correlador

- Determinar proyección de la señal recibida $r(t)$ en el espacio de señal del modulador: base ortonormal $\psi_i(t)$

$$z_i = \langle \mathbf{r}, \psi_i \rangle = \int_0^T r(t)\,\psi_i(t)\,dt$$



Banco de correladores

$$z_i = a_i + n_i$$

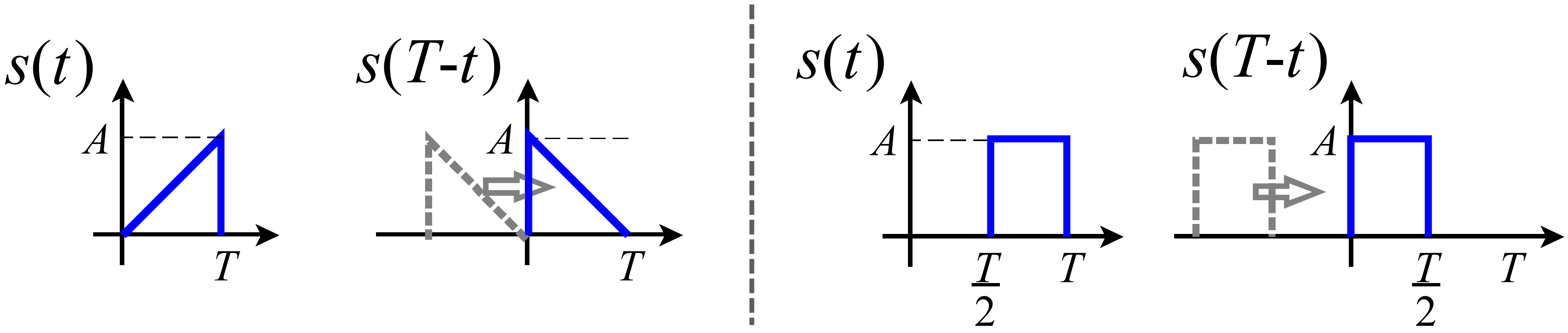
Coordenadas del símbolo recibido

Coordenadas del símbolo transmitido (posición nominal)

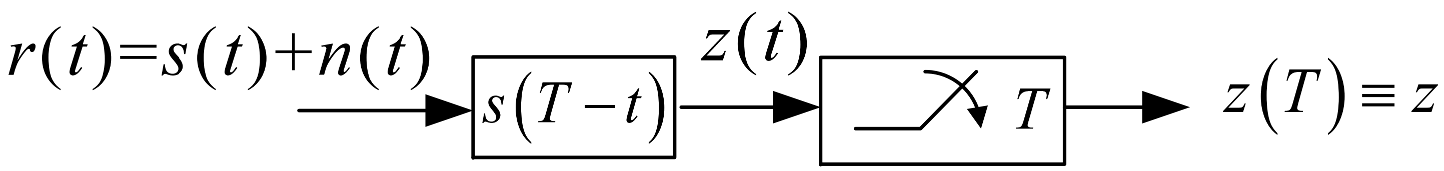
Filtro adaptado

- En general, el filtro adaptado a la señal $s(t)$ es la imagen especular de $s(t)$ respecto al origen, retrasada T: $s(T\text{-}t)$

EJEMPLOS



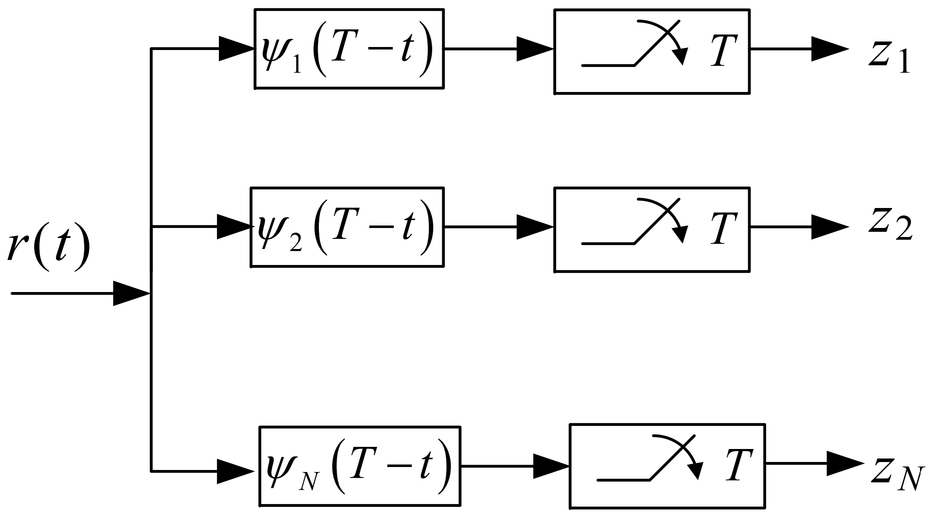
- Es el filtro que maximiza la relación señal/ruido a la salida



$$z(t) = r(t) * s(T - t)$$

Filtro adaptado. Implementación práctica

- Ahora empleamos un filtro "adaptado" a las funciones base ortonormales, no a las señales transmitidas



Si se transmite $s(t) = a_1 \cdot \psi_1(t)$, en ausencia de ruido, a la salida tenemos:

$$z_1 = \sqrt{e_s} = a_1$$

$$z_2 = z_3 \ldots = 0$$

Resumen. En ambos casos (filtro adaptado o correlador) obtenemos las coordenadas de la señal a_i con la adición de ruido

Tema 8. Transmisión digital banda base con ruido

TEORÍA DE LA DETECCIÓN (RECEPTOR BINARIO ÓPTIMO)

Señales binarias

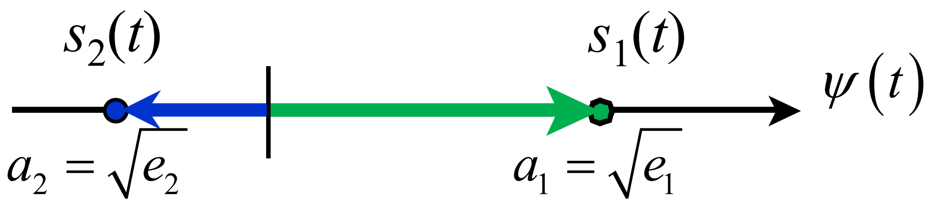
- Se transmiten señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ de duración T

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 \le t \le T \\ s_2(t), & 0 \le t \le T \end{cases}$$

$$e_1 = \frac{1}{R}\int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

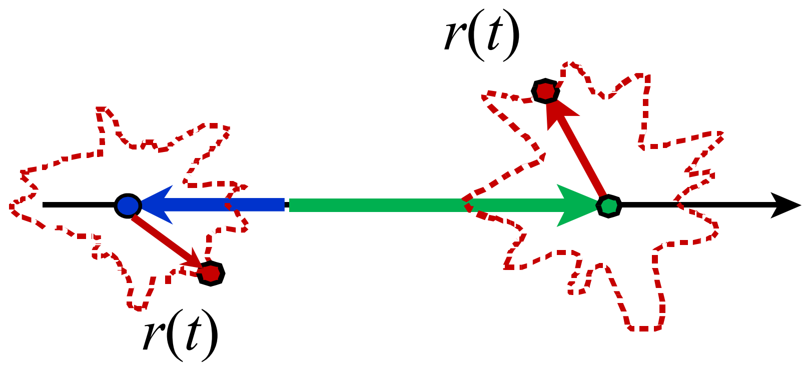
$$e_2 = \frac{1}{R}\int_0^T s_2^2(t)\,dt$$

Representación en base ortonormal (dimensión 1)

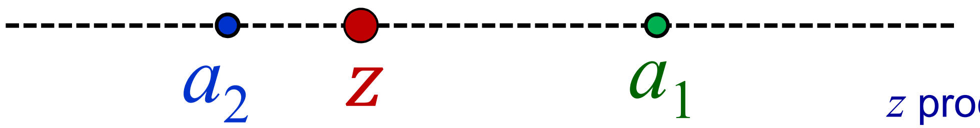


Adición de ruido gaussiano

Basta considerar el ruido en la proyección del espacio de señal. El problema se reduce a una dimensión



Detección de señales binarias



z procede del filtro adaptado o del correlador

$$z = a_i + n\,, \quad i = 1, 2$$

n es una v.a. gaussiana de parámetros:

$$\langle n \rangle = 0, \quad \sigma_0^2 = \frac{n_0}{2}$$

con función densidad de probabilidad (fdp):

$$f(n) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

Cuando se transmite $s_1(t)$:

z : es una v.a. gaussiana:

$$\langle z \rangle = a_1, \quad \sigma_0^2 = \frac{n_0}{2}$$

Cuando se transmite $s_2(t)$:

z : es una v.a. gaussiana

$$\langle z \rangle = a_2, \quad \sigma_0^2 = \frac{n_0}{2}$$

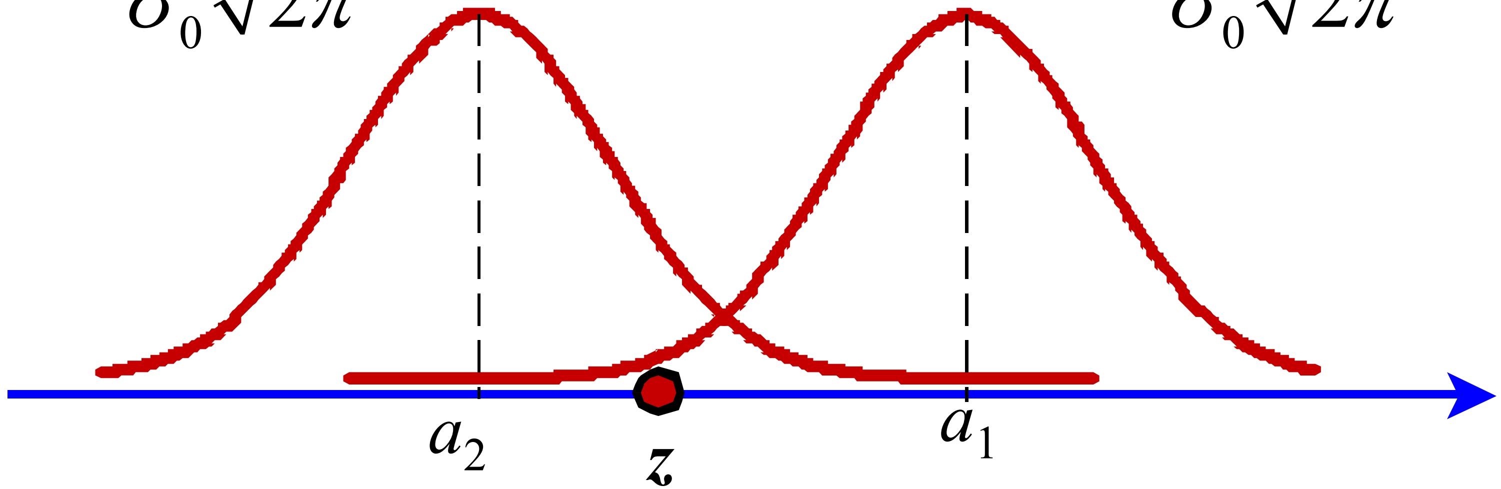
Definiciones

- $P(s_1),\ P(s_2)$ $\rightarrow$ probabilidades ***a priori***
  - ✓ Conocidas antes de la transmisión
- $f(z)$ $\rightarrow$ función densidad de probabilidad (fdp) de *z*
- $f(z|s_1), f(z|s_2)$ $\rightarrow$ fdp condicionadas
- $P(s_1|z),\ P(s_2|z)$ $\rightarrow$ probabilidades ***a posteriori***
- Decisiones:
  - ✓ $P(s_1|s_2),\ P(s_2|s_1)$ $\rightarrow$ **Error**
  - ✓ $P(s_1|s_1),\ P(s_2|s_2)$ $\rightarrow$ **Decisión correcta**

fdp condicionadas

$$f\left(z\middle|s_2\right)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2}$$

$$f\left(z\middle|s_1\right)=\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2}$$



Comparación con umbral

- Se compara z con umbral γ_0

$$z \underset{H_1}{\overset{H_2}{\lessgtr}} \gamma_0$$

Si $z > \gamma_0 \Rightarrow H_1$ (hipótesis: se envió s_1)

Si $z < \gamma_0 \Rightarrow H_2$ (hipótesis: se envió s_2)

¿Cómo escoger el umbral?

- El decisor:
  - ✓ Conoce las señales s_1 y s_2
  - ✓ Observa el valor de la muestra z
  - ✓ Determina qué señal es más probable que haya originado z

Criterio máximo a posteriori (MAP)

- Escoger el símbolo con mayor probabilidad **a posteriori**

Si $P(s_1|z) > P(s_2|z) \rightarrow H_1$

Si $P(s_2|z) > P(s_1|z) \rightarrow H_2$

- No conozco esas probabilidades. Aplico regla de Bayes:

$$P(s_1 | z) = \frac{f(z|s_1) \cdot P(s_1)}{f(z)}$$

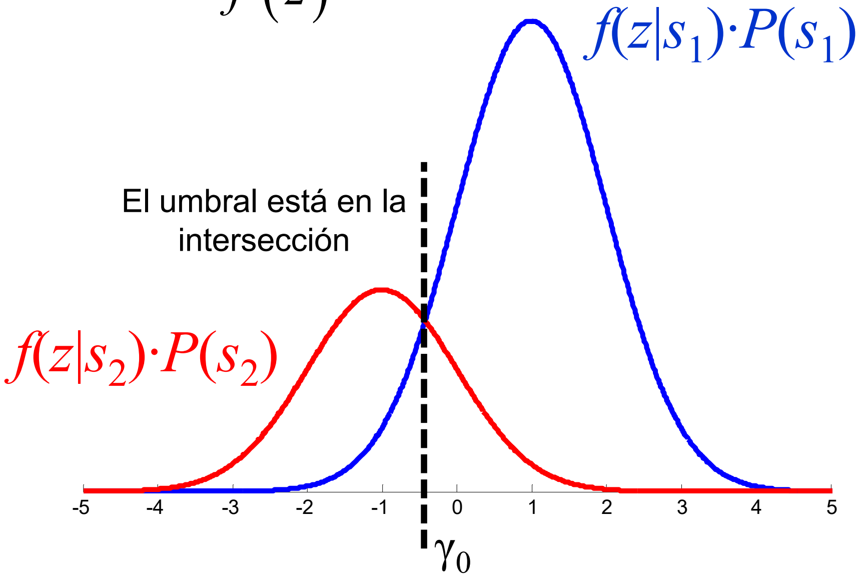
$$P(s_2 | z) = \frac{f(z|s_2) \cdot P(s_2)}{f(z)}$$

- En el umbral:

$$\boxed{P(s_1 | z) = P(s_2 | z)}$$

$$\frac{f(z|s_1) \cdot P(s_1)}{f(z)} = \frac{f(z|s_2) \cdot P(s_2)}{f(z)}$$

$$f(z|s_1) \cdot P(s_1) = f(z|s_2) \cdot P(s_2)$$



Criterio máximo a posteriori (MAP)

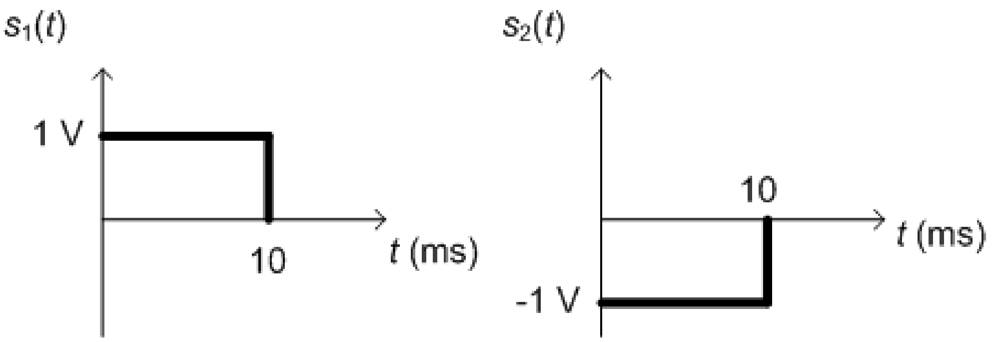
$$\left. e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2}\cdot P(s_1)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2}\cdot P(s_2)\right|_{z=\gamma_0}$$

$$\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\gamma_0^2-2a_2\gamma_0+a_2^2-\gamma_0^2+2a_1\gamma_0-a_1^2\right)=\ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right)$$

$$\gamma_0\cdot 2(a_1-a_2)=2\sigma_0^2\cdot\ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right)+a_1^2-a_2^2$$

$$\boxed{\gamma_0=\frac{\sigma_0^2}{|a_1-a_2|}\cdot\ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right)+\frac{(a_1+a_2)}{2}}$$

Ejemplo

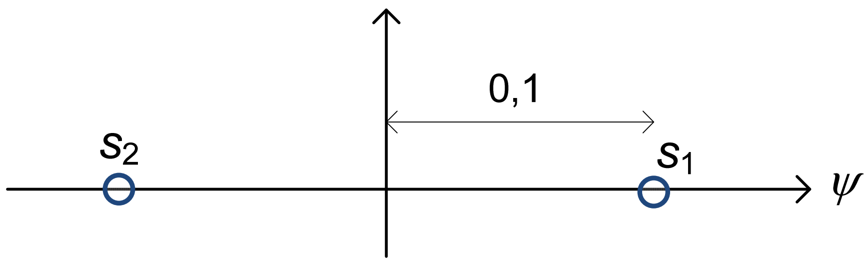


$P(s_1) = 0{,}1$ $\quad$ $P(s_2) = 0{,}9$

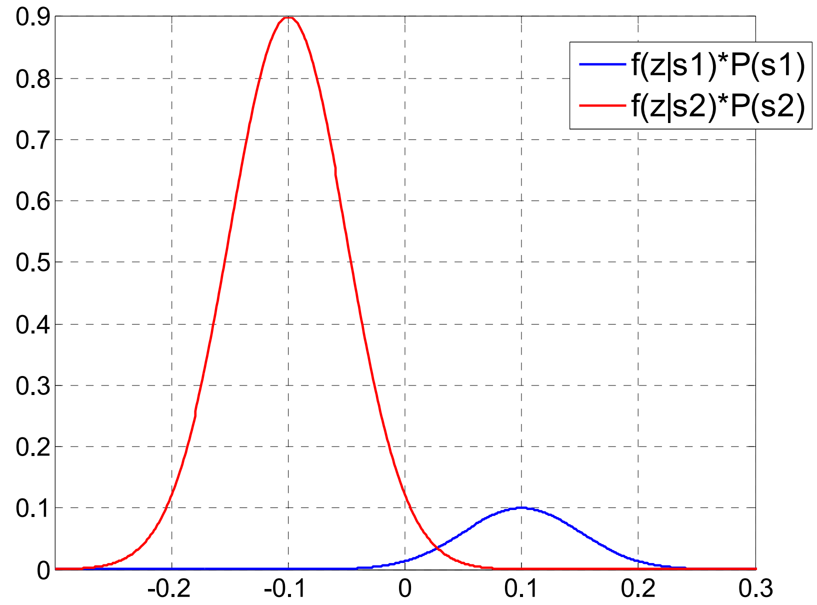
Ruido: $\sigma_0 = 0{,}05$

$R = 1\ \Omega$

$e_{s1} = e_{s2} = 0{,}01$ J



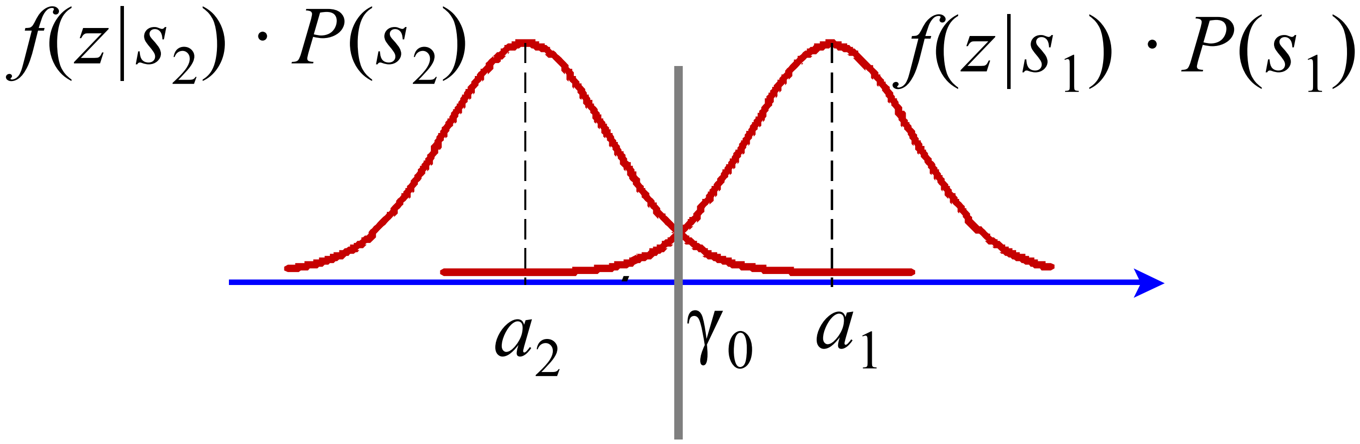
$$\gamma_0 = \frac{\sigma_0^2}{|a_1 - a_2|} \cdot \ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right) + \frac{(a_1 + a_2)}{2} = 0{,}027$$



Criterio de máxima verosimilitud

- Símbolos equiprobables $P(s_1) = P(s_2) = 0{,}5$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}}$$



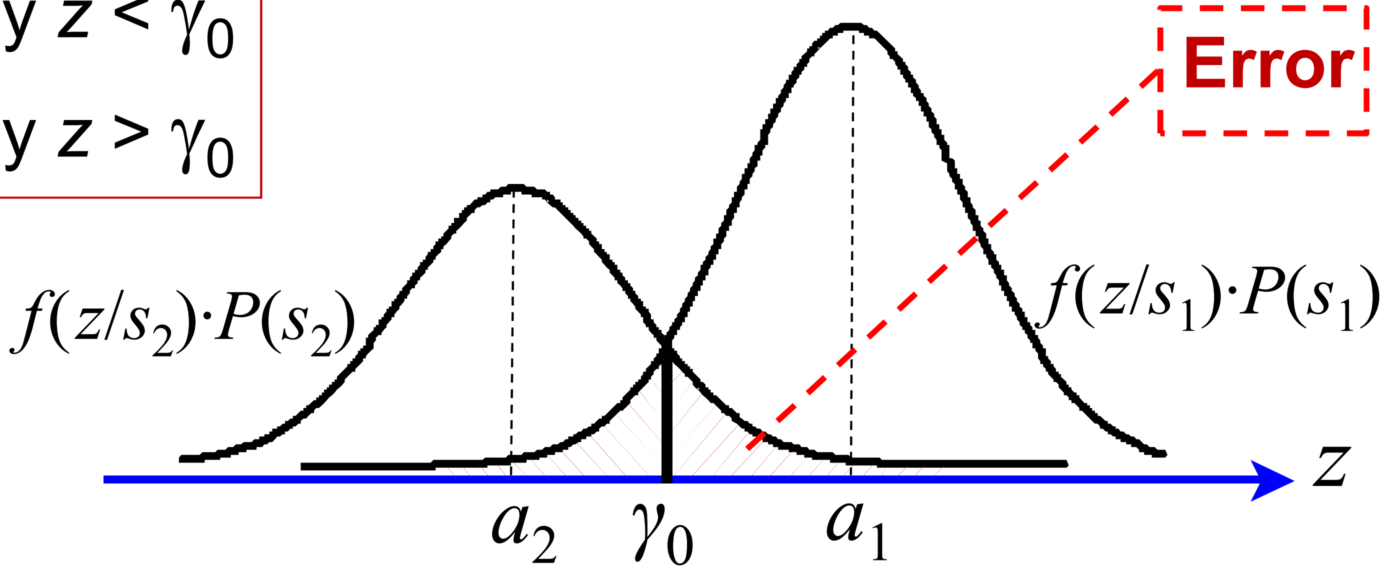
Tema 8. Transmisión digital banda base con ruido

PROBABILIDAD DE ERROR EN SISTEMAS BINARIOS

Errores en la detección

Se transmite s_1 y $z < \gamma_0$

Se transmite s_2 y $z > \gamma_0$

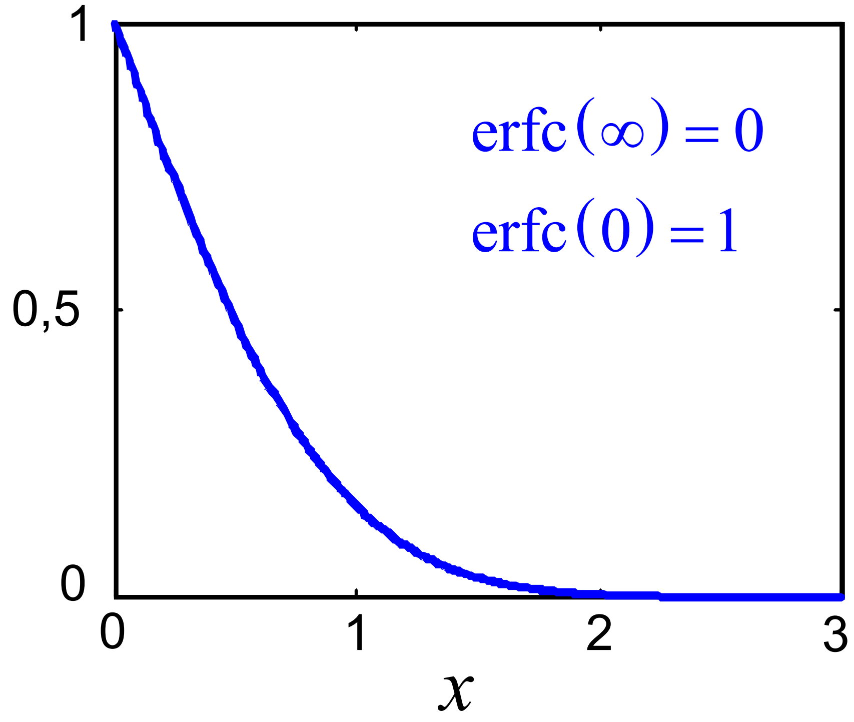


$$\text{Prob. error bit} \equiv P_b = P(s_1)\int_{-\infty}^{\gamma_0} f(z|s_1)\,dz + P(s_2)\int_{\gamma_0}^{\infty} f(z|s_2)\,dz =$$

$$= P(s_1)\int_{-\infty}^{\gamma_0} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2} dz + P(s_2)\int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2} dz$$

Función de error complementario

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} \cdot du$$



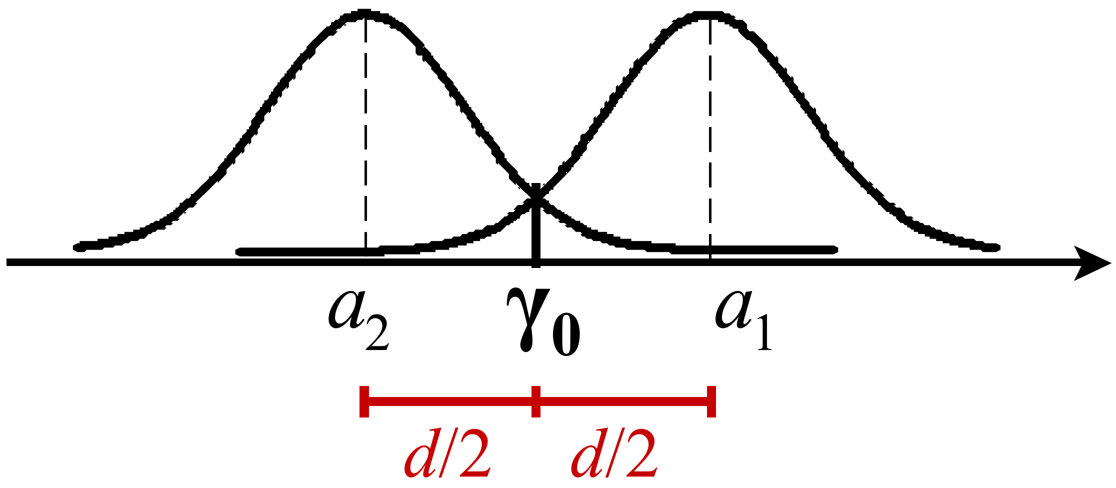
- Alternativa: función $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Cálculo de la probabilidad de error

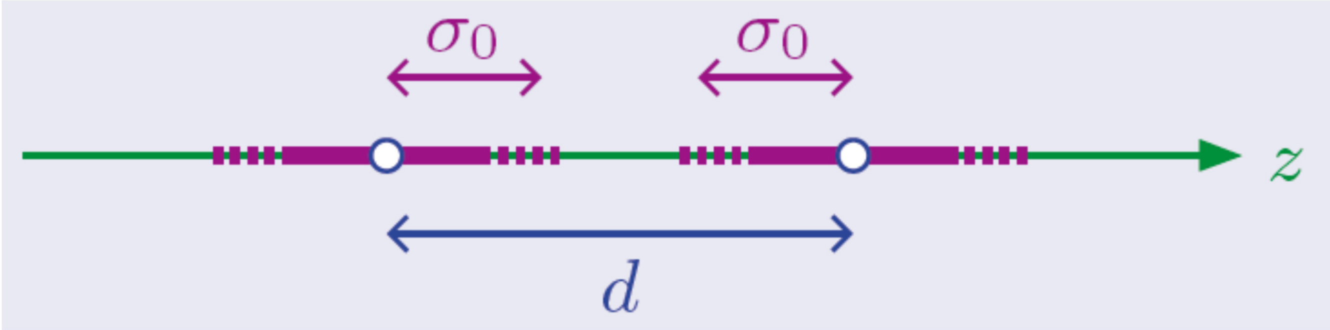
$$P_b = \frac{P(s_1)}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{a_1-\gamma_0}{\sigma_0\sqrt{2}}\right)+\frac{P(s_2)}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\gamma_0-a_2}{\sigma_0\sqrt{2}}\right)$$

- Si los símbolos son equiprobables:



$$P_b = \frac{1/2}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{d/2}{\sigma_0\sqrt{2}}\right)+\frac{1/2}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{d/2}{\sigma_0\sqrt{2}}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_0 2\sqrt{2}}\right)}$$

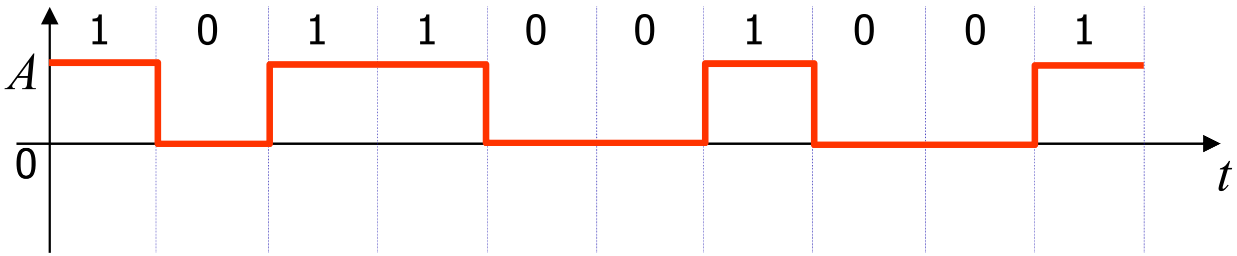
Cálculo de la probabilidad de error



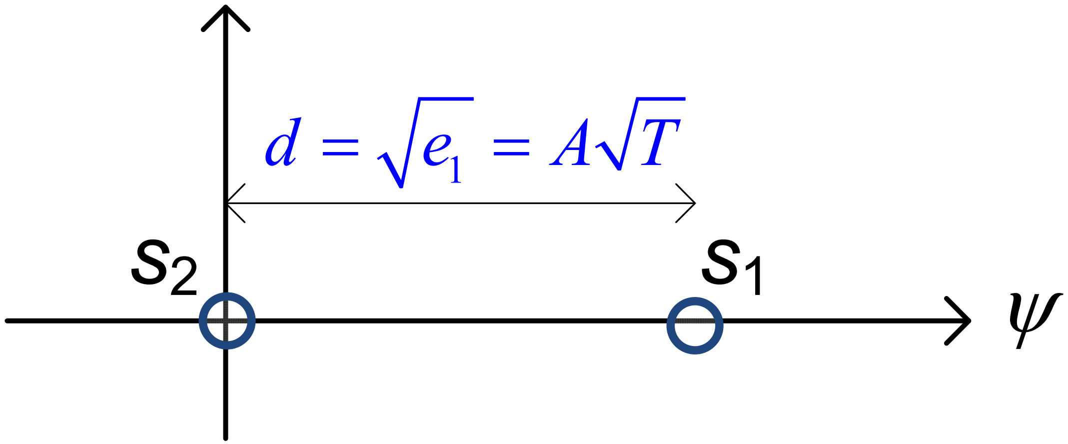
- Interpretación geométrica
  - ✓ Sobre el eje ***z***, normalizado en energía, pintamos las señales a_1, a_2, y el ruido gaussiano *n*
  - ✓ Las distancias son raíz de energía
  - ✓ La distancia entre señales, $d = |a_1 - a_2|$, indica la capacidad del sistema contra el ruido
  - ✓ El ruido, *n*, es la desviación típica, como raíz de energía
  - ✓ La relación entre ambas distancias (de señal y de ruido), fija la probabilidad de error

$$P_b = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_0 2\sqrt{2}}\right) = \text{función}\left(\frac{\text{señal}}{\text{ruido}}\right)$$

Ejemplo. NRZ-L-Unipolar



$$R = 1\ \Omega$$



Energía media por bit:

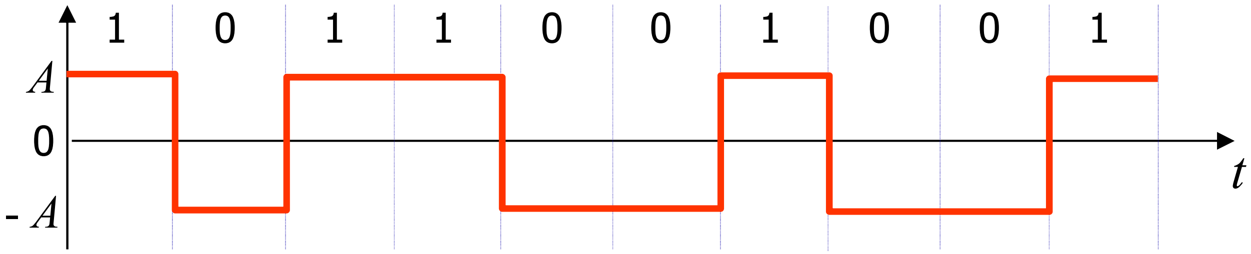
$$e_b = e_1/2$$

$$d = \sqrt{2\,e_b}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{n_0}{2}}$$

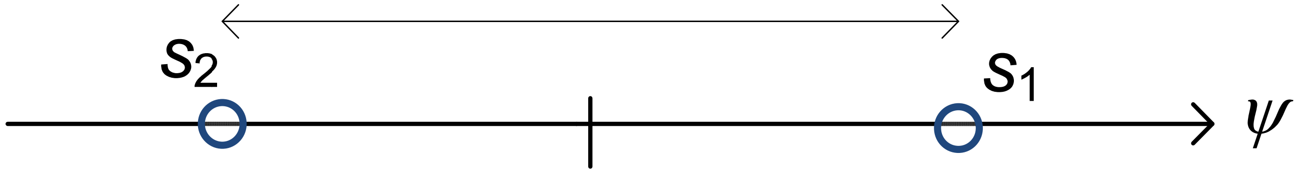
$$P_b = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_0 2\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{e_b}{2\,n_0}}\right)}$$

Ejemplo. NRZ-L-polar



$$R = 1\ \Omega$$

$$d = 2\sqrt{e_1} = 2A\sqrt{T}$$



Energía media por bit:

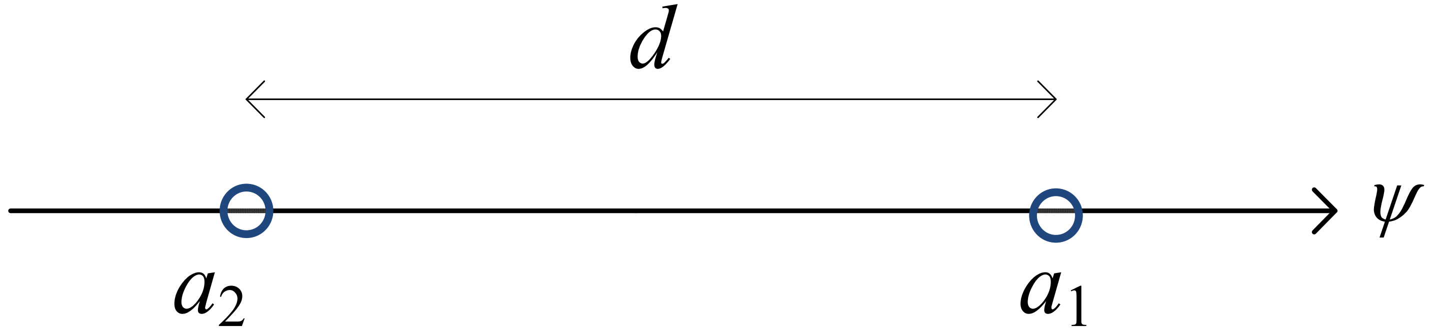
$$e_b = e_1 = e_2$$

$$d = 2\sqrt{e_b}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{n_0}{2}}$$

$$P_b = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_0 2\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{e_b}{n_0}}\right)}$$

RESUMEN



- Criterio máximo a posteriori

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_0^2}{|a_1 - a_2|} \ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right) + \frac{(a_1 + a_2)}{2}$$

- Probabilidad de error para símbolos equiprobables

$$P_b = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{d}{\sigma_0 2\sqrt{2}}\right) \qquad \sigma_0 = \sqrt{\frac{n_0}{2}}$$