**TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN**

UPM. ETSIST. DIAC — EP1 – abril de 2014

Apellidos: ........................................................................................

Nombre: ........................................ DNI: ........................................

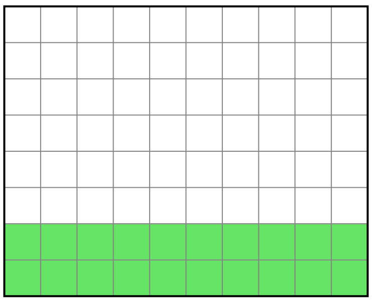
**EJERCICIO 1** *(1,25 puntos)*: Sea un sistema de $M = 8$ secciones, cada sección con un trozo de cable y, después, un amplificador. La ganancia del amplificador es $G = 30$ dB; la atenuación del trozo de cable que le precede vale igual ($A = G$). El factor de ruido del amplificador, $F$(dB), no se conoce. La longitud total de las 8 secciones es de $L_T = 4800$ m.

Para caracterizar el sistema anterior, desde el punto de vista de ruido, se realizan dos medidas con un analizador de espectros. En ambas la configuración del analizador es idéntica: nivel de referencia $-50$ dBm; escala vertical 10 dB/; span total 100 kHz; frecuencia central 10 MHz; ancho de banda de resolución 1 kHz; atenuación de entrada 0 dB.

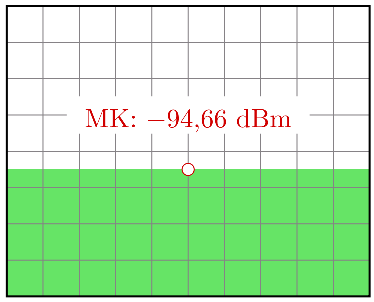
**Primera medida:** sin nada conectado a la entrada del analizador (por lo tanto con $T_0$ a la entrada). Es una medida de calibración, para evaluar el ruido del propio analizador.

**Segunda medida:** con el sistema de 8 secciones a la entrada del analizador. Es una medida para evaluar el ruido del conjunto de las secciones.

En la siguiente figura se observa el resultado de las dos medidas, la de calibración (con menos ruido) está en la pantalla izquierda.



M1: con $T_0$ a la entrada.




M2: con las 8 secciones a la entrada.

**a)** Calcule la longitud de cable que hay en una sección, $L$(m). Calcule la atenuación por unidad de longitud del tipo de cable utilizado, $\alpha$(dB/km). *(0,10 puntos.)*

**b)** Calcule la temperatura equivalente de ruido interno del analizador de espectros, $T_{e\,ae}(\text{K})$. Calcule el factor de ruido del analizador en unidades naturales y en dB, $f_{ae}(\text{v.p.})$ y $F_{ae}(\text{dB})$. *(0,50 puntos.)*

**c)** Calcule el factor de ruido del conjunto de secciones, $f_T(\text{v.p.})$ y $F_T(\text{dB})$. Calcule el factor de ruido del amplificador, $f(\text{v.p.})$ y $F(\text{dB})$. *(0,65 puntos.)*

**RESOLUCIÓN EJERCICIO 1.**

**a)** Longitud del trozo de cable de una sección:

$$L = \frac{L_T}{M} = \frac{4800}{8} = 600 \text{ m}$$

Atenuación por unidad de longitud del cable utilizado:

$$A(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$$

$$30 = \alpha \cdot 0{,}6 \quad \rightarrow \quad \alpha = 50 \text{ dB/km}$$

**b)** Usamos la medida de calibración:

$$n_1 = k \cdot T_0 \cdot RBW \cdot f_{ae}$$

$$N_1 = -110(\text{dBm}) = 10\ \log\left(1{,}3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 1000\right) + 10\ \log(1000) + F_{ae}$$

$$F_{ae} \approx 33{,}8 \text{ dB (valor más exacto: 33,82811)}$$

$$f_{ae} \approx 2414{,}4 \text{ v.p. (valor más exacto: 2414,40919)}$$

$$T_{e\,ae} = T_0\,(f_{ae} - 1) \approx 724022{,}8 \text{ K}$$

Es tipico aproximar $k\,T_0$ por $-174$ dBm/Hz.

**c)** Usamos la segunda medida:

$$N_2 = -94{,}66 \text{ dBm} \quad \rightarrow \quad n_2 = 3{,}41979 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$\frac{n_2}{RBW} = N_0 = 3{,}41979 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz}$$

$$N_0 = k\,(T_{in} + T_{e\,ae}) = k\,(T_{eT} + T_{e\,ae})$$

$$T_{eT} \approx 2{,}40463 \cdot 10^{10} \text{ K}$$

$$f_T = 1 + \frac{T_{eT}}{T_0} \approx 80155 \text{ v.p.}$$

$$F_T \approx 49{,}0 \text{ dB (valor más exacto: 49,0393)}$$

$$f_T \approx N \cdot a \cdot f$$

$$80155 = 8 \cdot 1000 \cdot f$$

$$f \approx 10{,}019 \text{ v.p.} \quad \rightarrow \quad F = 10{,}0 \text{ dB}$$

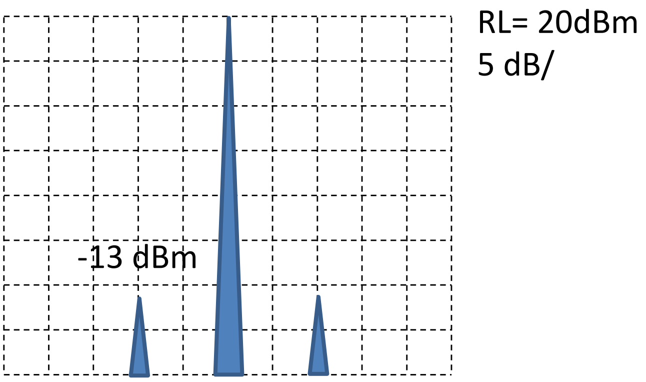
(Nótese que ahora no se puede calcular $n_2$ como el ruido de las secciones a través de $f_{ae}$, pues el ruido a la entrada —el de las secciones— no es $T_0$. Sin embargo, sí es posible trabajar con factores de ruido tomando la cascada de las secciones con el analizador; a la entrada de las secciones es razonable suponer $T_0$; una vez obtenido el factor de ruido global, se despeja el de las secciones con la fórmula de Friis.)

Apellidos:.........................................................................................................................................

Nombre: ........................................................................................... DNI:..................................

**PROBLEMA 1** (*3,5 Puntos*).

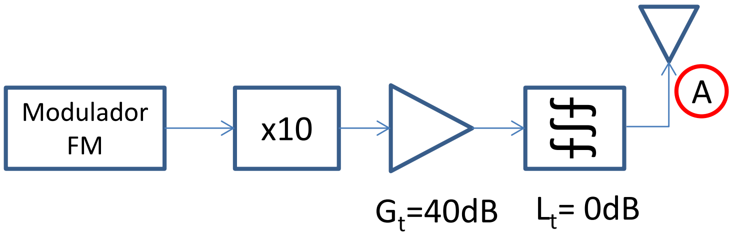
Un modulador excitado por un tono de frecuencia $f_m$=5 kHz sobre una portadora $f_c$=0,8 MHz. La resistencia de referencia es de 50 Ω. El espectro de la señal visto en un analizador de espectros con frecuencia central de 0,8 MHz, span de 25 kHz, ,5dB/ y RBW de 1kHz es el que se muestra.



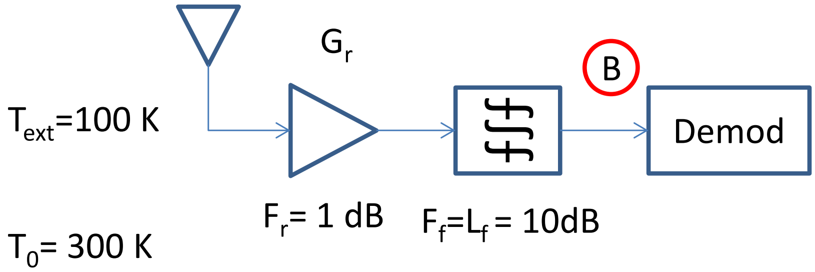

a) Si el transmisor produjese una posible señal AM indique la amplitud de la portadora de AM (A) y el índice de modulación. (25%)

b) Si el transmisor produjese una posible señal FM de índice de modulación β<<1 (banda estrecha), indique la amplitud de la señal de FM (A) y el índice de modulación β. (25%)

Comprobando en el dominio del tiempo la amplitud se observa que es constante lo que supone que el modulador es realmente de FM. Dicho modulador se conecta al siguiente transmisor:




y dicho transmisor se recibe por un receptor (de la figura siguiente) después de unas pérdidas de transmisión de L=175dB.




Las ganancias o pérdidas y figuras de ruido de los elementos de transmisor y receptor están descritas en los anteriores diagramas de bloques respectivos.

c) Ancho de banda mínimo y frecuencia central del filtro del receptor. (10%)

d) Calcule la ganancia del receptor $G_r$ (en dB) si el parámetro z en el punto B está 6 dB por encima del parámetro z del umbral de recepción de FM ($z_u = 40(\beta + 1)$). (30%)

e) Calcule la relación entre las señales a ruido entre la entrada y la salida del demodulador de FM del receptor. (10%)

**Soluciones al PROBLEMA 1 (3,5 p)**

a) *Si el transmisor produjese una posible señal AM indique la amplitud de la portadora de AM (A) y el índice de modulación. (25%)*

Siendo la potencia de la portadora ($P_C$):

$$P_C = -10 \text{ dBW} \qquad p_C = 0.1 \text{ w} = \frac{A^2}{2R} \qquad A = \sqrt{2Rp_c} = 3.162\, V$$

y las de cada banda lateral ($P_{BL}$), la diferencia de potencia $\Delta p = \frac{p_{BL}}{p_C} = \frac{1}{2}\frac{p_{2BL}}{p_C}$

$$\frac{p_{2BL}}{p_C} = 2\Delta p = \frac{\frac{m^2A^2}{4}}{\frac{A^2}{2}} = \frac{m^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad m = 2\sqrt{\Delta p} = 0.045$$

b) *Si el transmisor produjese una posible señal FM de índice de modulación β<<1 (banda estrecha), indique la amplitud de la señal de FM (A) y el índice de modulación β. (25%)*

En fc $\quad P_c = -10\, dBW \;\rightarrow\; \frac{A^2}{2R} = 0.1 \;\rightarrow\; A = \sqrt{2Rp_c} = 3.162\ V$

En fc ±fm $\quad P_{BL} = P_c + \Delta P = -43\, dBW \rightarrow \frac{A^2}{2R}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \Delta p = 5.012 \cdot 10^{-4} \rightarrow \beta = 2\sqrt{\Delta p} = 0.045$

c) *Ancho de banda mínimo y frecuencia central del filtro del receptor. (10%)*

Ancho de BB: W=5 kHz

Multiplicador de frecuencia: $\Delta = 10$

Índice de modulación: $\beta' = \Delta \cdot \beta = 0.448$

Ancho de Banda de Carson: $B_{FM} = 2W(\beta' + 1) = 14.48\, kHz$ ANCHO DE BANDA DEL FILTRO

Frecuencia central: $f_c' = \Delta \cdot f_c = 8$ MHz

d) *Calcule la ganancia del receptor $G_r$ (en dB) si el parámetro z en el punto B está 6 dB por encima del parámetro z del umbral de recepción de FM ($z_u = 40(\beta + 1)$). (30%)*

Potencia transmitida: $p_{Tx} = p_c g_t = 1kw$

Potencia recibida: $p_{Rx} = \frac{p_{Tx}}{l} = 3.162 \cdot 10^{-15} w$

Parámetro $z_u$: $z_u = 40(\beta' + 1) = 57.91$

Incremento de z $\quad \Delta Z = 6\, dB$

Parámetro z: $z = \frac{p_r}{n_0 W} = \frac{p_{Rx} g_r l_r}{n_{0eq} g_r l_r W} = \frac{p_{Rx}}{n_{0eq} W} = \Delta z \cdot z_u = 230.543$

Temperatura de antena: $T_{ext} = 100\ K$

La temperatura equivalente de ruido a la entrada del Rx se obtiene como:

$$T_{eq} = T_{ext} + T_0(f_r - 1) + \frac{T_0(f_f - 1)}{g_r} \qquad \rightarrow \qquad n_{0eq} = k\, T_{eq}$$

En conclusión el parámetro z se puede escribir como:

$$z = \frac{p_{Rx}}{k\left[T_{ext} + T_0(f_r - 1) + \dfrac{T_0(f_f - 1)}{g_r}\right]w}$$

y la ganancia del amplificador del receptor se puede obtener como:

$$g_r = \frac{T_0(f_f - 1)}{\dfrac{p_{Rx}}{zW} - kT_{ext} - kT_0(f_r - 1)} = 128.444 \quad \rightarrow \quad G_r = 10\log(g_r) = 21.087\ dB$$

e) *Calcule la relación entre las señales a ruido entre la entrada y la salida del demodulador de FM del receptor. (10%)*

La relación señal a ruido vale:

$$\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{z}}{2(\beta + 1)} = 79.621 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathrm{in}} = 10\log\left(\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{in}}\right) = 19.01\ \mathrm{dB}$$

$$\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{out}} = 3\beta^2\langle \mathrm{x}_\mathrm{n}^2\rangle \mathrm{z} = 69.327 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathrm{in}} = 10\log\left(\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{in}}\right) = 18.409\ \mathrm{dB}$$

Y finalmente la relación entre la señal a ruido entre la salida y la entrada del demodulador:

$$\left.\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathrm{in}}\middle/\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathrm{in}}\right. = -0.601\ \mathrm{dB}$$

Apellidos: ....................................................................................

Nombre: ........................................ DNI: ........................................

**PROBLEMA 2** *(3,50 puntos)*: (Nota: no puntuarán los resultados sin justificar.)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales:

- Todo el sistema está adaptado a $Z = 50\ \Omega$.
- Se debe transmitir una información con $R_b = 500$ Mb/s.
- La modulación es 32QAM.
- Se transmite una potencia media $P_T = +50$ dBm.
- El medio se modela como un filtro en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 1$, y atenuación en la banda de paso $A_t = 100$ dB.
- El ruido a la entrada del receptor se corresponde con una temperatura $T_{in} = 2731$ K; el receptor tiene un factor de ruido $F = 20$ dB.
- Se adjunta una gráfica de calidad para las modulaciones digitales.
- Nota: tome $f_c$ como la frecuencia de portadora, sin un valor determinado.

**1.** Calcule el régimen simbólico del sistema. Calcule el ancho de banda ocupado en el medio. *(0,60 puntos.)*

**2.** Calcule la energía media por símbolo en recepción, $E_s$. Represente la constelación recibida en el plano IQ con ejes ortonormales. (Explicite cuáles son los ejes, $\psi_I$ y $\psi_Q$.) Calcule la distancia entre símbolos contiguos, $d$. *(1,30 puntos.)*

**3.** Sobre un dibujo de la constelación recibida, dibuje las fronteras de decisión. Calcule la energía mínima que necesitará el ruido para producir un error de símbolo. *(0,60 puntos.)*

**4.** Calcule la relación $(E_b/N_0)$(dB) en el receptor. Calcule la BER del sistema. *(1,00 puntos.)*

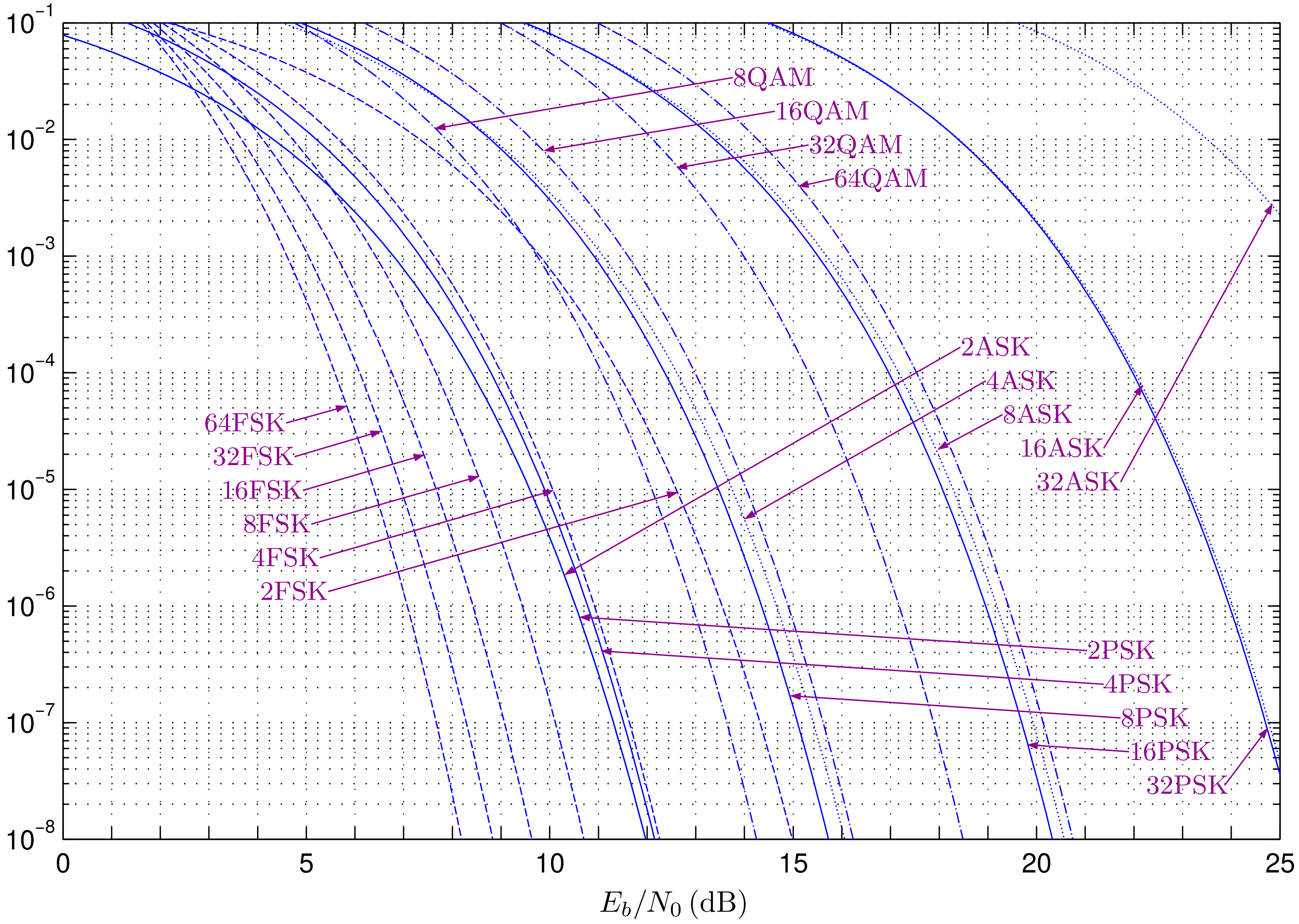



Figura 1: Probabilidad de error de símbolo ($P_s$) en función de $E_b/N_0$ (dB) para las modulaciones digitales.

**RESOLUCIÓN PROBLEMA 2.**

**1.** Régimen simbólico:

$$M = 32 = 2^5 \quad \rightarrow \quad k = 5 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{500(\text{M})}{5} = 100 \text{ Mbaudios}$$

Ancho de banda ocupado:

$$B = R_s\,(1+\alpha) = 100(\text{M})\,(1+1) = 200 \text{ MHz}$$

**2.** Energía por símbolo en recepción:

$$P_R = P_T - A_t = 50 - 100 = -50 \text{ dBm} \quad \rightarrow \quad p_R = 10^{-8} \text{ W}$$

$$E_s = p_R \cdot T = \frac{10^{-8}}{100 \cdot 10^6} = 10^{-16} \text{ J}$$

Ejes IQ ortonormales:

$$\psi_I = \sqrt{\frac{2\,Z}{T}}\,\cos(\omega_c\,t)$$

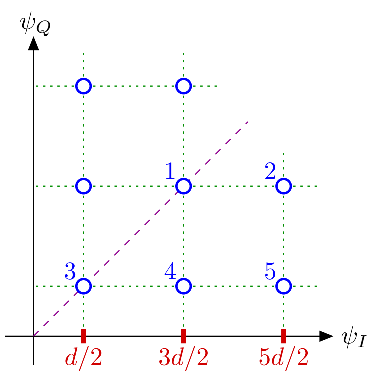
$$\psi_Q = -\sqrt{\frac{2\,Z}{T}}\,\sin(\omega_c\,t)$$

donde:

$$\omega_c = 2\pi\,f_c$$

$$\sqrt{\frac{2\,Z}{T}} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^6} = 10^5$$

En la siguiente figura se observa el primer cuadrante de la constelación 32QAM. Los otros cuadrantes se obtienen por simetría con los ejes horizontal y vertical. La distancia entre símbolos contiguos es $d$. (Nota: en la figura se representa una constelación ideal, pero en RX y con presencia de ruido se verían nubes gaussianas en lugar de puntos.)




Analizamos la constelación 32QAM con los ejes ortonormales:

$$E_1 = \left(\frac{3\,d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\,d}{2}\right)^2 = \frac{9\,d^2}{2}$$

$$E_2 = \frac{17\,d^2}{2}\,; \quad E_3 = \frac{d^2}{2}\,; \quad E_4 = \frac{5\,d^2}{2}\,; \quad E_5 = \frac{13\,d^2}{2}$$

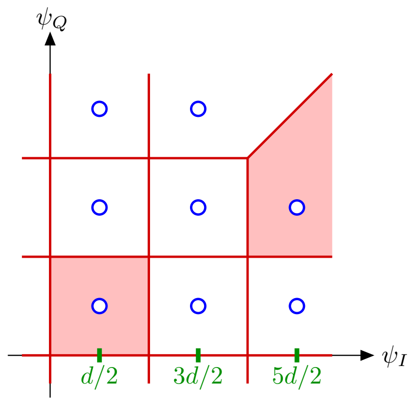
$$E_s = \frac{E_1 + E_3 + 2\,E_2 + 2\,E_4 + 2\,E_5}{8} = 5\,d^2$$

Como $E_s$ ya se ha calculado:

$$d^2 = \frac{E_s}{5} = 2 \cdot 10^{-17}$$

$$d \approx 4{,}472136 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

**3.** En la siguiente figura se observa el primer cuadrante de la constelación 32QAM, con las fronteras de decisión. Los otros cuadrantes se obtienen por simetría con los ejes horizontal y vertical.




El desplazamiento mínimo (distancia) que produce error en un simbolo es, obviamente, $d/2$. Por lo tanto, la energía mínima que produce un error de símbolo es:

$$E_n = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} = 5 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

**4.** Calculamos el ruido:

$$T_{in} = 2731 \text{ K}$$

$$T_e = T_0\,(f-1) = 300\,(100-1) = 29700 \text{ K}$$

$$N_0 = k\,(T_{in} + T_e) = 4{,}4774239 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

La relación señal a ruido de bit es:

$$E_b = \frac{E_s}{5} = d^2 = 2 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 44{,}6685 \text{ v.p.} \quad \to \quad 16{,}5 \text{ dB}$$

En la gráfica, para 32QAM:

$$P_s \approx 7 \cdot 10^{-6} \quad (\text{con MATLAB: } 6{,}67 \cdot 10^{-6})$$

Y suponiendo una codificación de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{5} = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$$