

Apellidos: .....

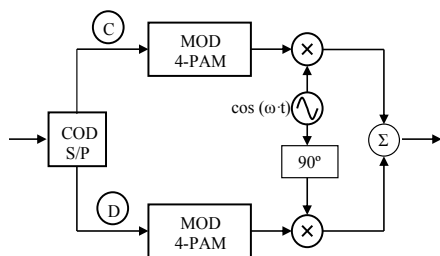
Nombre: ..... DNI: .....

**EJERCICIO 2 (1,5 Puntos).**

Dado un sistema de comunicación digital, se transmite una información cuyo régimen binario es de  $R_b=50\text{Mbps}$  a través de un medio que puede ser modelado como un filtro en coseno alzado con  $\alpha=0.5$ . Se modula según la constelación de la figura 2 a una frecuencia de  $10\text{GHz}$ . Esta señal es enviada a través de un medio con una atenuación de  $A_t=60\text{ dB}$ . En la entrada del receptor, se ha medido una densidad espectral bilateral de ruido de  $N_0/2=10.54 \cdot 10^{-12}\text{ W/Hz}$ .



(a)



(b)

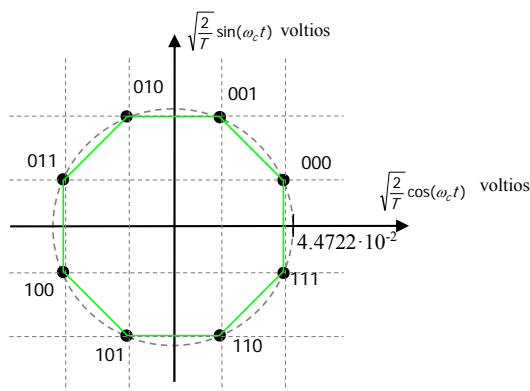


Figura 1

Figura 2

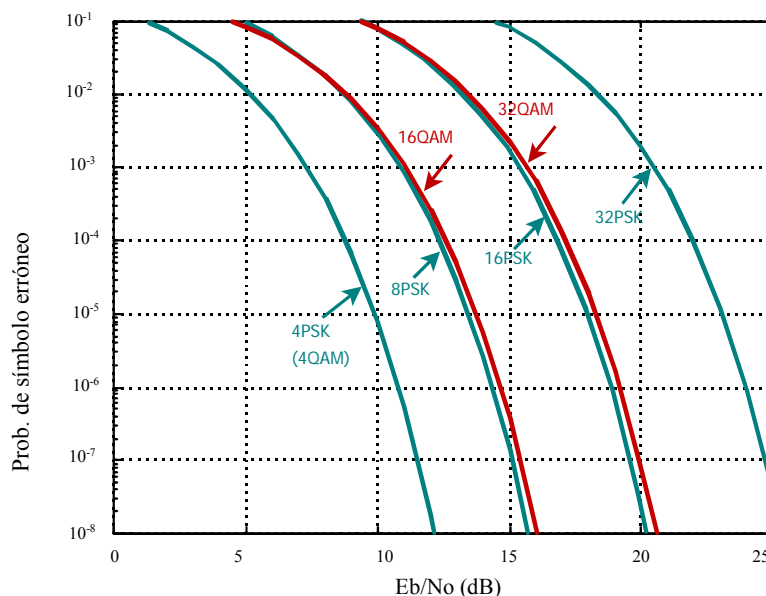


Figura 3

1. Escriba una expresión genérica  $s_i(t)$  válida para todas las señales de la constelación de la figura 2. Indique el valor de cada una de las variables implicadas (0.25 puntos).
2. Calcule la energía media por símbolo a la entrada del receptor (0.25 puntos).
3. Calcule el número de ciclos de portadora que hay en cada símbolo (0.25 puntos).
4. Indique la velocidad binaria en los puntos C y D de la figura 1(b) (0.25 puntos).
5. Calcular la probabilidad de bit erróneo por el método gráfico (0.5 puntos).

## Soluciones al EJERCICIO 2 (1.5 Puntos).

1. Escriba una expresión genérica  $s_i(t)$  válida para todas las señales de la constelación de la figura 2. Indique el valor de cada una de las variables implicadas. (0.25 puntos)

La expresión genérica de una constelación PSK:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{T_s}} \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \theta_i) \quad \forall (1)$$

Que para el caso de la 8PSK de la figura:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{T_s}} \cdot \cos\left[\omega_c \cdot t + \frac{\pi}{8}(2i-1)\right] \quad (2)$$

Donde:

$$\sqrt{E} = 4.4722 \cdot 10^{-2} \Rightarrow E = 2mJ$$

$$T_s = 3 \cdot T_b = 3 \cdot \frac{1}{R_b} = 3 \cdot \frac{1}{50 \cdot 10^6} = 60ns$$

$$\omega_c = 2\pi \cdot f_c = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

2. Calcule la energía media por símbolo a la entrada del receptor (0.5 puntos).

La atenuación del medio para la energía es:

$$60dB = 10 \cdot \log(a_{tE}) \Rightarrow a_{tE} = 10^6 \text{ (veces de tensión)}$$

Luego:

$$E_{STX} = 2mJ \Rightarrow E_{SRX} = \frac{E_{STX}}{a_{tE}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^6} \Rightarrow \boxed{E_{SRX} = \bar{E}_{SRX} = 2 \cdot 10^{-9} J}$$

3. Calcule el número de ciclos de portadora que hay en cada símbolo (0.25 puntos).

Como:

$$\begin{array}{l} T_s = 60ns \\ f_c = 10GHz \end{array} \quad \text{entonces} \quad \boxed{600 \text{ ciclos de portadora} / T_{\text{símbolo}}}$$

4. Indique la velocidad binaria en los puntos C y D de la figura 1(a) (0.25 puntos).

Cada una de las ramas del modulador tiene un modulador 4-PAM, que necesita de 2 bits para codificar los cuatro niveles de cada eje. Por tanto:

$$R'_b = \frac{2}{3} R_b \Rightarrow R'_b = \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 10^6 \Rightarrow \boxed{R'_b = 33.33Mbps}$$

5. Calcular la probabilidad de bit erróneo por el método gráfico (0.5 puntos).

Para poder operar con la gráfica, es necesario obtener la relación Eb/No en dB:

Donde  $N_0 = 2 \cdot 10.54 \cdot 10^{-12} = 21.081 \cdot 10^{-12} \frac{W}{Hz}$

Se puede aproximar que:  $E_b \approx \frac{E_{SRX}}{k} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} J$

$$10 \cdot \log\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{2}{3} \cdot 10^{-9}}{21.081 \cdot 10^{-12}}\right) \approx 15 dB$$

En la gráfica se obtiene para 8PSK:

$$P_s \approx 10^{-7} \Rightarrow P_b \approx \frac{P_s}{3} = \frac{10^{-7}}{3} \Rightarrow \boxed{P_b = 33.3 \cdot 10^{-9}}$$

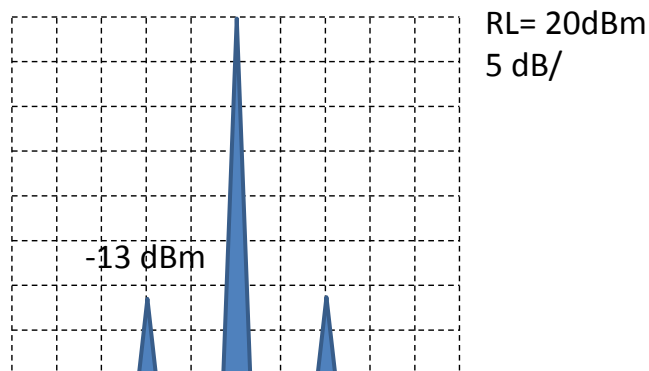


Apellidos: .....

Nombre: ..... DNI: .....

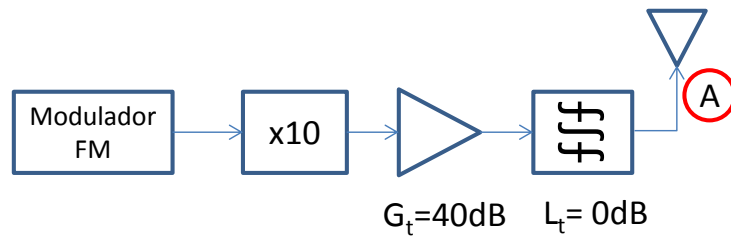
**PROBLEMA 1** (3,5 Puntos).

Un modulador excitado por un tono de frecuencia  $f_m=5$  kHz sobre una portadora  $f_c=0,8$  MHz. La resistencia de referencia es de  $50\ \Omega$ . El espectro de la señal visto en un analizador de espectros con frecuencia central de 0,8 MHz, span de 25 kHz,  $5\text{dB/}$  y RBW de 1kHz es el que se muestra.

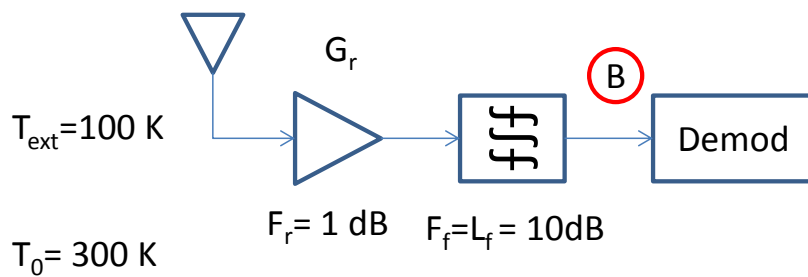


- a) Si el transmisor produjese una posible señal AM indique la amplitud de la portadora de AM (A) y el índice de modulación. (25%)
- b) Si el transmisor produjese una posible señal FM de índice de modulación  $\beta \ll 1$  (banda estrecha), indique la amplitud de la señal de FM (A) y el índice de modulación  $\beta$ . (25%)

Comprobando en el dominio del tiempo la amplitud se observa que es constante lo que supone que el modulador es realmente de FM. Dicho modulador se conecta al siguiente transmisor:



y dicho transmisor se recibe por un receptor (de la figura siguiente) después de unas pérdidas de transmisión de  $L=175\text{dB}$ .



Las ganancias o pérdidas y figuras de ruido de los elementos de transmisor y receptor están descritas en los anteriores diagramas de bloques respectivos.

c) Ancho de banda mínimo y frecuencia central del filtro del receptor. (10%)

d) Calcule la ganancia del receptor  $G_r$  (en dB) si el parámetro  $z$  en el punto B está 6 dB por encima del parámetro  $z$  del umbral de recepción de FM ( $z_u = 40(\beta + 1)$ ). (30%)

- e) Calcule la relación entre las señales a ruido entre la entrada y la salida del demodulador de FM del receptor. (10%)

### Soluciones al PROBLEMA 1 (3,5 p)

- a) Si el transmisor produjese una posible señal AM indique la amplitud de la portadora de AM (A) y el índice de modulación. (25%)

Siendo la potencia de la portadora ( $P_C$ ):

$$P_C = -10 \text{ dBW} \quad p_c = 0.1 \text{ W} = \frac{A^2}{2R} \quad A = \sqrt{2Rp_c} = 3.162 \text{ V}$$

y las de cada banda lateral ( $P_{BL}$ ), la diferencia de potencia  $\Delta p = \frac{P_{BL}}{P_C} = \frac{1}{2} \frac{P_{2BL}}{P_C}$

$$\frac{P_{2BL}}{P_C} = 2\Delta p = \frac{\frac{m^2 A^2}{4}}{\frac{A^2}{2}} = \frac{m^2}{2} \rightarrow m = 2\sqrt{\Delta p} = 0.045$$

- b) Si el transmisor produjese una posible señal FM de índice de modulación  $\beta < 1$  (banda estrecha), indique la amplitud de la señal de FM (A) y el índice de modulación  $\beta$ . (25%)

En fc  $P_C = -10 \text{ dBW} \rightarrow \frac{A^2}{2R} = 0.1 \rightarrow A = \sqrt{2Rp_c} = 3.162 \text{ V}$

En fc  $\pm f_m$   $P_{BL} = P_C + \Delta P = -43 \text{ dBW} \rightarrow \frac{A^2}{2R} \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \Delta p = 5.012 \cdot 10^{-4} \rightarrow \beta = 2\sqrt{\Delta p} = 0.045$

- c) Ancho de banda mínimo y frecuencia central del filtro del receptor. (10%)

Ancho de BB:  $W = 5 \text{ kHz}$

Multiplicador de frecuencia:  $\Delta = 10$

Índice de modulación:  $\beta' = \Delta \cdot \beta = 0.448$

Ancho de Banda de Carson:  $B_{FM} = 2W(\beta' + 1) = 14.48 \text{ kHz}$  ANCHO DE BANDA DEL FILTRO

Frecuencia central:  $f_c' = \Delta \cdot f_c = 8 \text{ MHz}$

- d) Calcule la ganancia del receptor  $G_r$  (en dB) si el parámetro  $z$  en el punto B está 6 dB por encima del parámetro  $z$  del umbral de recepción de FM ( $z_u = 40(\beta + 1)$ ). (30%)

Potencia transmitida:  $p_{Tx} = p_c g_t = 1 \text{ kW}$

Potencia recibida:  $p_{Rx} = \frac{p_{Tx}}{l} = 3.162 \cdot 10^{-15} \text{ W}$

Parámetro  $z_u$ :  $z_u = 40(\beta' + 1) = 57.91$

Incremento de  $z$   $\Delta Z = 6 \text{ dB}$

Parámetro  $z$ :  $z = \frac{p_r}{n_0 W} = \frac{p_{Rx} g_r l_r}{n_{0eq} g_r l_r W} = \frac{p_{Rx}}{n_{0eq} W} = \Delta Z \cdot z_u = 230.543$

Temperatura de antena:  $T_{ext} = 100 \text{ K}$

La temperatura equivalente de ruido a la entrada del Rx se obtiene como:

$$T_{eq} = T_{ext} + T_0(f_r - 1) + \frac{T_0(f_f - 1)}{g_r} \rightarrow n_{0eq} = k T_{eq}$$

En conclusión el parámetro  $z$  se puede escribir como:

$$z = \frac{p_{Rx}}{k \left[ T_{ext} + T_0(f_r - 1) + \frac{T_0(f_f - 1)}{g_r} \right] W}$$

y la ganancia del amplificador del receptor se puede obtener como:

$$g_r = \frac{T_0(f_f - 1)}{\frac{p_{Rx}}{zW} - kT_{ext} - kT_0(f_r - 1)} = 128.444 \quad \rightarrow \quad G_r = 10 \log(g_r) = 21.087 \text{ dB}$$

e) Calcule la relación entre las señales a ruido entre la entrada y la salida del demodulador de FM del receptor. (10%)

La relación señal a ruido vale:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{z}{2(\beta + 1)} = 79.621 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = 10 \log\left(\left(\frac{S}{N}\right)_{in}\right) = 19.01 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 3\beta^2 \langle x_n^2 \rangle z = 69.327 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = 10 \log\left(\left(\frac{S}{N}\right)_{in}\right) = 18.409 \text{ dB}$$

Y finalmente la relación entre la señal a ruido entre la salida y la entrada del demodulador:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} / \left(\frac{S}{N}\right)_{in} = -0.601 \text{ dB}$$



Apellidos: .....

Nombre: ..... DNI: .....

**PROBLEMA 2** (*3,50 puntos*): (Nota: no puntuarán los resultados sin justificar.)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales:

- Todo el sistema está adaptado a  $Z = 50 \Omega$ .
- Se debe transmitir una información con  $R_b = 500 \text{ Mb/s}$ .
- La modulación es 32QAM.
- Se transmite una potencia media  $P_T = +50 \text{ dBm}$ .
- El medio se modela como un filtro en coseno alzado, con factor de redondeo  $\alpha = 1$ , y atenuación en la banda de paso  $A_t = 100 \text{ dB}$ .
- El ruido a la entrada del receptor se corresponde con una temperatura  $T_{in} = 2731 \text{ K}$ ; el receptor tiene un factor de ruido  $F = 20 \text{ dB}$ .
- Se adjunta una gráfica de calidad para las modulaciones digitales.
- Nota: tome  $f_c$  como la frecuencia de portadora, sin un valor determinado.

1. Calcule el régimen simbólico del sistema. Calcule el ancho de banda ocupado en el medio.  
(*0,60 puntos*.)

2. Calcule la energía media por símbolo en recepción,  $E_s$ . Represente la constelación recibida en el plano IQ con ejes ortonormales. (Explicite cuáles son los ejes,  $\psi_I$  y  $\psi_Q$ .) Calcule la distancia entre símbolos contiguos,  $d$ . (1,30 puntos.)

3. Sobre un dibujo de la constelación recibida, dibuje las fronteras de decisión. Calcule la energía mínima que necesitará el ruido para producir un error de símbolo. *(0,60 puntos.)*

4. Calcule la relación  $(E_b/N_0)$ (dB) en el receptor. Calcule la BER del sistema. *(1,00 puntos.)*

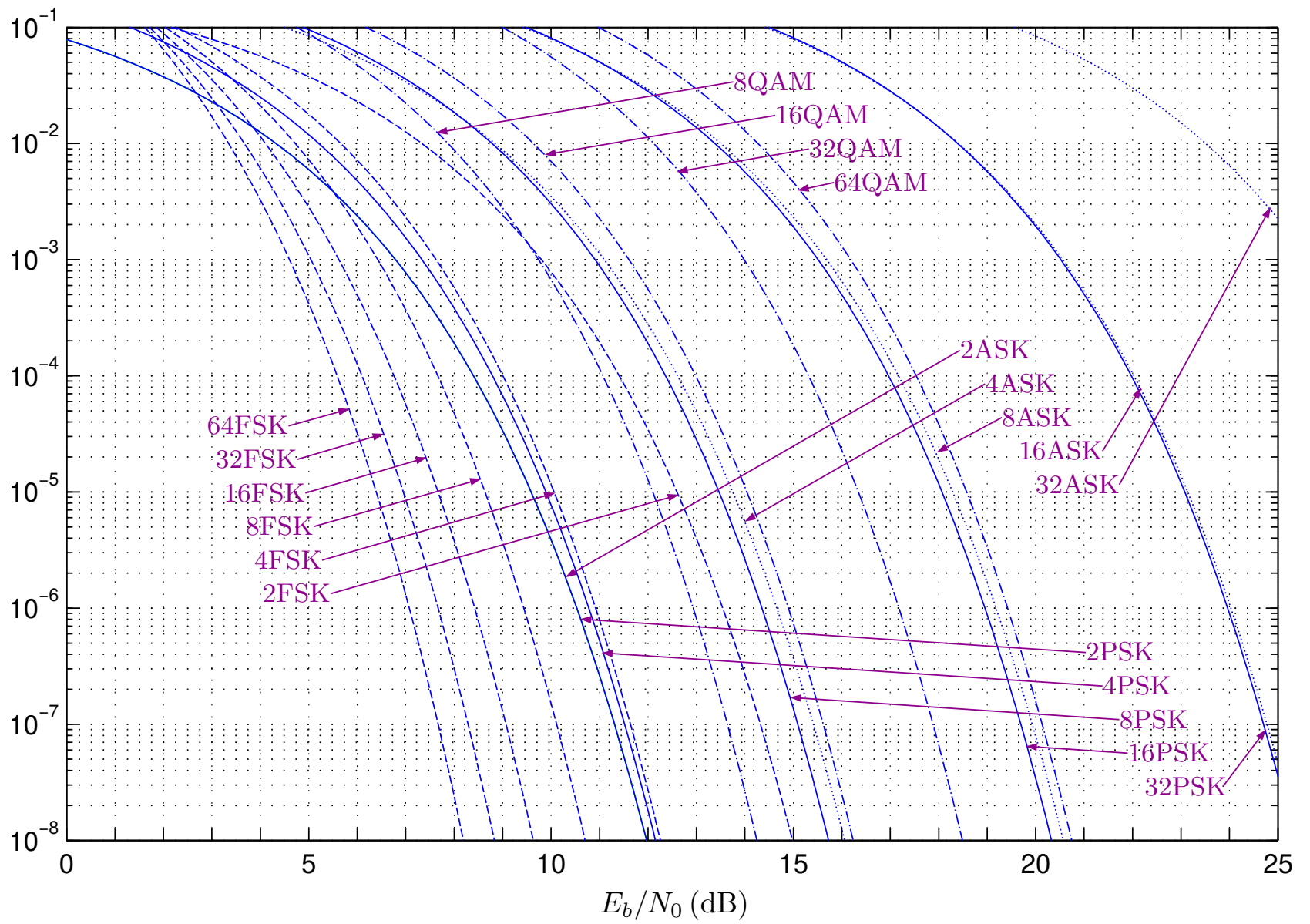


Figura 1: Probabilidad de error de símbolo ( $P_s$ ) en función de  $E_b/N_0$  (dB) para las modulaciones digitales.

## RESOLUCIÓN PROBLEMA 2.

### 1. Régimen simbólico:

$$M = 32 = 2^5 \rightarrow k = 5 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{500(\text{M})}{5} = 100 \text{ Mbaudios}$$

Ancho de banda ocupado:

$$B = R_s (1 + \alpha) = 100(\text{M}) (1 + 1) = 200 \text{ MHz}$$

### 2. Energía por símbolo en recepción:

$$P_R = P_T - A_t = 50 - 100 = -50 \text{ dBm} \rightarrow p_R = 10^{-8} \text{ W}$$

$$E_s = p_R \cdot T = \frac{10^{-8}}{100 \cdot 10^6} = 10^{-16} \text{ J}$$

Ejes IQ ortonormales:

$$\psi_I = \sqrt{\frac{2Z}{T}} \cos(\omega_c t)$$

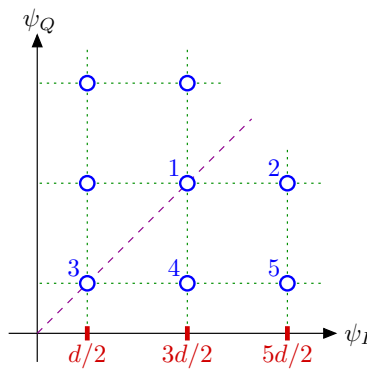
$$\psi_Q = -\sqrt{\frac{2Z}{T}} \sin(\omega_c t)$$

donde:

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$\sqrt{\frac{2Z}{T}} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^6} = 10^5$$

En la siguiente figura se observa el primer cuadrante de la constelación 32QAM. Los otros cuadrantes se obtienen por simetría con los ejes horizontal y vertical. La distancia entre símbolos contiguos es  $d$ . (Nota: en la figura se representa una constelación ideal, pero en RX y con presencia de ruido se verían nubes gaussianas en lugar de puntos.)



Analizamos la constelación 32QAM con los ejes ortonormales:

$$E_1 = \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = \frac{9d^2}{2}$$

$$E_2 = \frac{17d^2}{2}; \quad E_3 = \frac{d^2}{2}; \quad E_4 = \frac{5d^2}{2}; \quad E_5 = \frac{13d^2}{2}$$

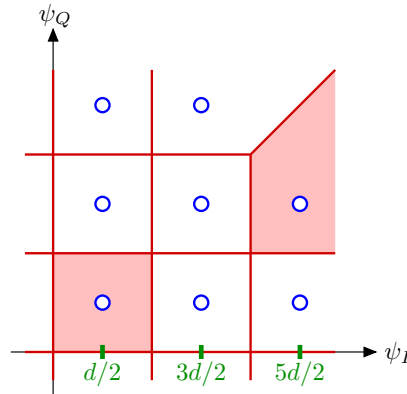
$$E_s = \frac{E_1 + E_3 + 2 E_2 + 2 E_4 + 2 E_5}{8} = 5 d^2$$

Como  $E_s$  ya se ha calculado:

$$d^2 = \frac{E_s}{5} = 2 \cdot 10^{-17}$$

$$d \approx 4,472136 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

3. En la siguiente figura se observa el primer cuadrante de la constelación 32QAM, con las fronteras de decisión. Los otros cuadrantes se obtienen por simetría con los ejes horizontal y vertical.



El desplazamiento mínimo (distancia) que produce error en un símbolo es, obviamente,  $d/2$ . Por lo tanto, la energía mínima que produce un error de símbolo es:

$$E_n = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} = 5 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

4. Calculamos el ruido:

$$T_{in} = 2731 \text{ K}$$

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 4,4774239 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

La relación señal a ruido de bit es:

$$E_b = \frac{E_s}{5} = d^2 = 2 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 44,6685 \text{ v.p.} \rightarrow 16,5 \text{ dB}$$

En la gráfica, para 32QAM:

$$P_s \approx 7 \cdot 10^{-6} \quad (\text{con MATLAB: } 6,67 \cdot 10^{-6})$$

Y suponiendo una codificación de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{5} = 1,4 \cdot 10^{-6}$$